

**INSTITUTO
FEDERAL**
Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação 8 – Teoria de Informação

Capacidade do Canal

Curso: Engenharia de Telecomunicações
Disciplina: COM29008 - Sistemas de Comunicação II
Professor: Marcio Henrique Doniak e Roberto Wanderley da Nobrega

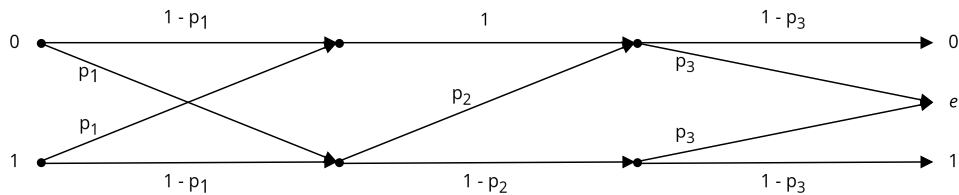
Aluno

João Pedro Menegali Salvan Bitencourt

12 de agosto de 2024

Exercício

Considere uma transmissão binária de uma fonte equiprovável por um canal digital. O canal pode ser representado pelo canal equivalente representado por um BSC em série com um canal Z em série com um BEC, conforme mostrado na figura abaixo:



O canal possui as seguintes definições:

- A probabilidade de transição do canal BSC, p , é igual às probabilidades de transição do canal Z e de apagamento do canal BEC.
- Varie a probabilidade de transição da seguinte forma: $p = 0,001:0,050$, com passo de 0,001.
- Apresente o gráfico da capacidade do canal pela probabilidade de transição p .
- Qual é a probabilidade de transição, na qual a Capacidade desse canal é zero?

Resolução

As probabilidades são dadas por:

$$p(y = 0 | x = 0) = (1 - p_1) \cdot 1 \cdot (1 - p_3) + p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) = (1 - p_1)(1 - p_3) + p_1 p_2 (1 - p_3)$$

$$p(y = 0 | x = 0) = 1 - p_3 - p_1 + p_1 p_3 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_3$$

$$p(y = 0 | x = 1) = p_1 \cdot 1 \cdot (1 - p_3) + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) = p_1(1 - p_3) + p_2(1 - p_1)(1 - p_3)$$

$$p(y = 0 | x = 1) = p_1 - p_1 p_3 + p_2(1 - p_3 - p_1 + p_1 p_3)$$

$$p(y = 0 | x = 1) = p_1 - p_1 p_3 + p_2 - p_2 p_3 - p_1 p_3 + p_1 p_2 p_3$$

$$p(y = 0 | x = 1) = p_1 - 2p_1 p_3 + p_2 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$$

$$p(y = 1 | x = 0) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3)$$

$$p(y = 1 | x = 0) = p_1(1 - p_3 - p_2 + p_2 p_3)$$

$$p(y = 1 | x = 0) = p_1 - p_1 p_3 - p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3$$

$$p(y = 1 | x = 1) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$$

$$p(y = 1 | x = 1) = 1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2 - p_3 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3$$

$$p(y = e | x = 0) = (1 - p_1) \cdot 1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot p_3$$

$$p(y = e | x = 0) = (1 - p_1)p_3 + p_1 p_2 p_3 + p_1 p_3(1 - p_2)$$

$$p(y = e | x = 0) = p_3 - p_1 p_3 + p_1 p_2 p_3 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3$$

$$p(y = e | x = 0) = p_3$$

$$p(y = e | x = 1) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot 1 \cdot p_3$$

$$\begin{aligned}
p(y = e | x = 1) &= (1 - p_1)(1 - p_2)p_3 + (1 - p_1)p_2p_3 + p_1p_3 \\
p(y = e | x = 1) &= (1 - p_2 - p_1 + p_1p_2)p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3 + p_1p_3 \\
p(y = e | x = 1) &= p_3 - p_2p_3 - p_1p_3 + p_1p_2p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3 + p_1p_3 \\
p(y = e | x = 1) &= p_3
\end{aligned}$$

Dessa forma, é possível destacar as equações:

- $p(y = 0 | x = 0) = 1 - p_3 - p_1 + p_1p_3 + p_1p_2 - p_1p_2p_3$
- $p(y = 0 | x = 1) = p_1 - 2p_1p_3 + p_2 - p_2p_3 + p_1p_2p_3$
- $p(y = 1 | x = 0) = p_1 - p_1p_3 - p_1p_2 + p_1p_2p_3$
- $p(y = 1 | x = 1) = 1 - p_1 - p_2 + p_1p_2 - p_3 + p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3$
- $p(y = e | x = 0) = p_3$
- $p(y = e | x = 1) = p_3$

Assumindo que $p_1 = p_2 = p_3 = p$, tem-se que:

- $p(y = 0 | x = 0) = 1 - p - p + p \cdot p + p \cdot p - p \cdot p \cdot p$
 $p(y = 0 | x = 0) = 1 - 2p + 2p^2 - p^3$
- $p(y = 0 | x = 1) = p - 2 \cdot p \cdot p + p - p \cdot p + p \cdot p \cdot p$
 $p(y = 0 | x = 1) = p - 2p^2 + p - p^2 + p^3$
 $p(y = 0 | x = 1) = 2p - 3p^2 + p^3$
- $p(y = 1 | x = 0) = p - p \cdot p - p \cdot p + p \cdot p \cdot p$
 $p(y = 1 | x = 0) = p - 2p^2 + p^3$
- $p(y = 1 | x = 1) = 1 - p - p + p \cdot p - p + p \cdot p + p \cdot p - p \cdot p \cdot p$
 $p(y = 1 | x = 1) = 1 - p - p + p^2 - p + p^2 + p^2 - p^3$
 $p(y = 1 | x = 1) = 1 - 3p + 3p^2 - p^3$
- $p(y = e | x = 0) = p$
- $p(y = e | x = 1) = p$

Montando a matriz, obtém-se:

$p(y x)$	$x = 0$	$x = 1$
$y = 0$	$1 - 2p + 2p^2 - p^3$	$2p - 3p^2 + p^3$
$y = 1$	$p - 2p^2 + p^3$	$1 - 3p + 3p^2 - p^3$
$y = e$	p	p

Como os símbolos da fonte são equiprováveis, tem-se que $H(X) = 1$ bit, conforme demonstrado no cálculo abaixo:

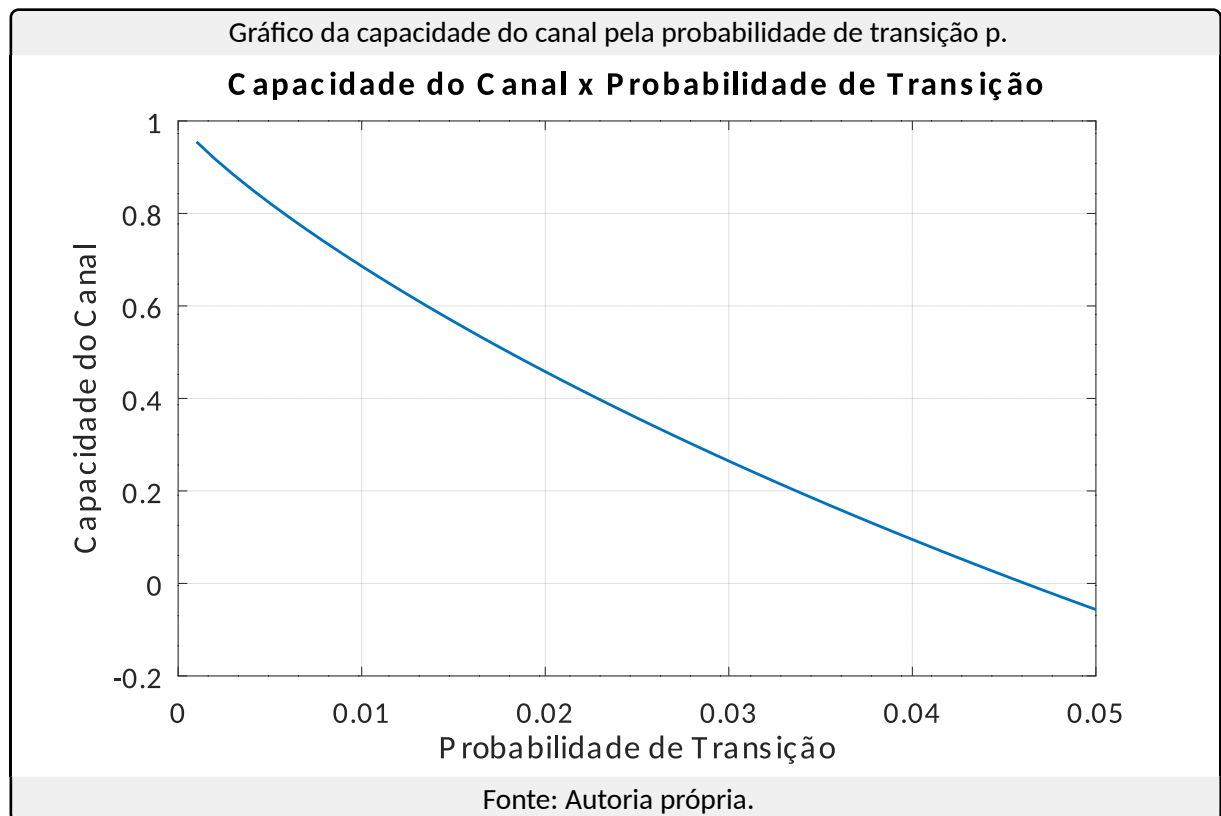
$$H(X) = p(x=0) \log_2\left(\frac{1}{p(x=0)}\right) + p(x=1) \log_2\left(\frac{1}{p(x=1)}\right) = 0.5 \log_2\left(\frac{1}{0.5}\right) + 0.5 \log_2\left(\frac{1}{0.5}\right)$$

$$H(X) = 0.5 \log_2(2) + 0.5 \log_2(2) = 0.5 + 0.5 = 1$$

Dessa forma, a capacidade do canal é dada por:

$$C = H(X) + (1 - 2p + 2p^2 - p^3) \log_2(1 - 2p + 2p^2 - p^3) + \\ + (2p - 3p^2 + p^3) \log_2(2p - 3p^2 + p^3) + (p - 2p^2 + p^3) \log_2(p - 2p^2 + p^3) + \\ + (1 - 3p + 3p^2 - p^3) \log_2(1 - 3p + 3p^2 - p^3) + p \log_2 p$$

Realizando a simulação na linguagem MATLAB, obtém-se o gráfico da capacidade do canal pela probabilidade de transição p :



Por fim, a probabilidade de transição, na qual a Capacidade desse canal é zero, é de $p \approx 0,047$, conforme demonstrado no gráfico acima.