João Pedro Menegali Salvan Bitencourt

Revisão de Sinais e Sistemas

1) Determinar se os sinais abaixo são periódicos e, caso sejam, determinar o período fundamental.

a) $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

$$x[n+N] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+N)\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi N}{3}\right)}_{1} - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi N}{3}\right)}_{0}$$

$\frac{2\pi N}{3} = 2k\pi \rightarrow N = \frac{6k\pi}{2\pi} \Rightarrow N = 3k$ Com $k=1$, obtém-se $N=3$

b) $x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

$$x[n+N] = \operatorname{sen}\left(\frac{2(n+N)}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2n}{3} + \frac{2N}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{2n}{3} + \frac{2N}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{2n}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$\frac{2N}{3} = 2k\pi \rightarrow N = 3k\pi$ Neste caso, não há um valor inteiro de $k$ que resulte em $N$ inteiro. Portanto, o sinal não é periódico.

c) $x[n] = e^{j\frac{2\pi n}{3}}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$$\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{m}{N}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{m}{N}$$

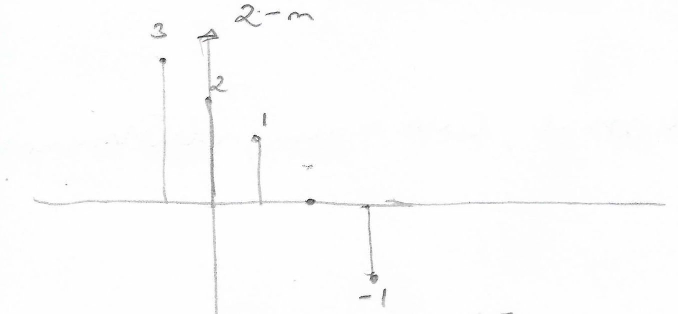
$N = 3m$

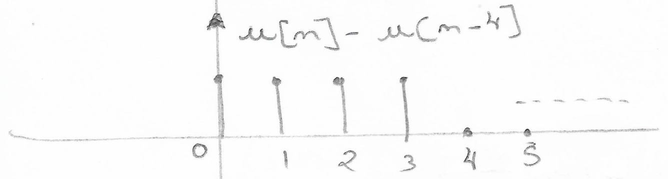
$\boxed{N=3}$ $m = 1$ resulta em $N$ inteiro.

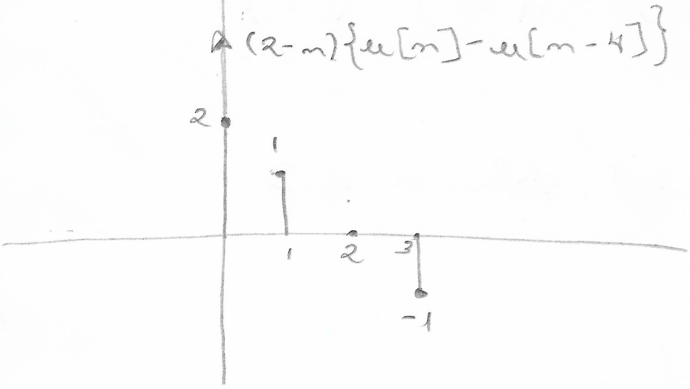
Neste caso, o sinal é periódico e o período fundamental é 1

2) Dada a sequência $x[n]=(2-n)\{u[n]-u[n-4]\}$

Faça o gráfico de $y[n]=x[-2n-4]$



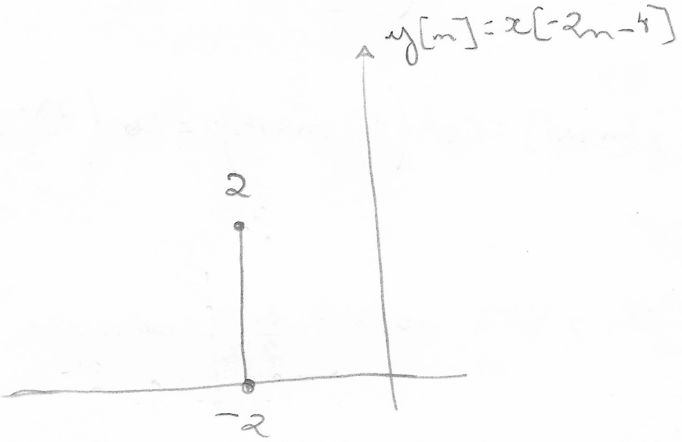




$y[n]=x[-2n-4]$

$y[-2]=x[0]$

$y[-3]=x[2]$




3) Determine se o sistema $y[n]=n\,x[n+3]$ é causal, invariante no deslocamento e linear.

• Causalidade

Com $\boxed{n=1}$

$y[1]=x[4]$ Como a saída $y[1]$ depende da entrada futura $x[4]$, o sistema é dito não causal.

• Invariância no deslocamento

$y_1[n]=n\,x_1[n+3]$

$y_2[n]=n\,x_1[(n-n_0)+3]$

$y_3[n]=y_1[n-n_0]=(n-n_0)\,x_1[(n-n_0)+3]$

$y_1[n-n_0]\neq y_2[n]$ O sistema é variante no tempo.

• Linearidade

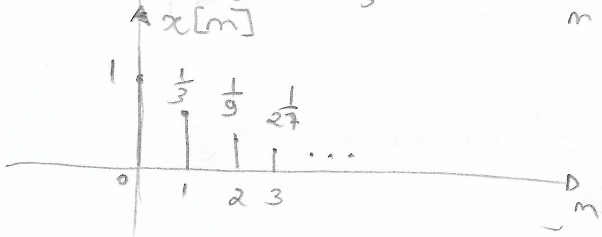
$$\mathcal{H}\{a x[n]\} = a\, n\, x[n+3] \quad \text{e} \quad \mathcal{H}\{x_1[n]+x_2[n]\} = n[x_1(n+3) + x_2(n+3)]$$

$$= a\,\mathcal{H}\{x[n]\} \qquad\qquad = n x_1(n+3) + n x_2(n+3)$$

$$= \mathcal{H}\{x_1[n]\} + \mathcal{H}\{x_2[n]\}$$

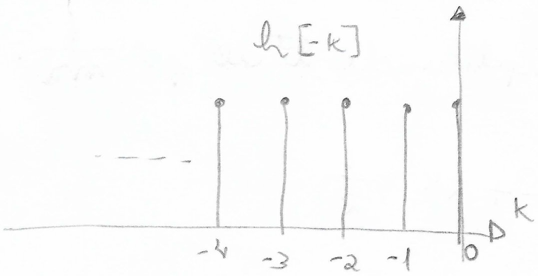
Portanto, o sistema é linear.

4) Um sistema linear e invariante ao deslocamento tem a seguinte resposta ao impulso: $h[n] = u[n]$. Encontre, utilizando a convolução, a saída se a entrada for $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$.


$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \qquad h[n] = u[n]$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 1, & n \geq 0 \\ 0, & c.c. \end{cases} \qquad \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$




$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{k \geq 0} \cdot \underbrace{h[n-k]}_{\substack{n-k \geq 0 \\ k \leq n}}$$

Para $n \geq 0$ há intersecção, portanto:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Sendo $\sum_{n=0}^{m} r^n = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$, podemos ajustar o somatório acima:

$$y[n] = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3-3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{3-1} = \frac{3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{2} u[n]$$

5) Considere a sequência de tempo discreto $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Encontre dois sinais diferentes de tempo contínuo que produzem essa sequência quando são amostrados com uma frequência de $f_s = 5\,kHz$.

$$x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Sabendo que $x(t) = \cos(\omega_c t)$:

$$x[n] = \cos(\omega_c n T_s) = \cos\left(\omega_c n \cdot \frac{1}{f_s}\right) = \cos\left(\frac{\omega_c n}{f_s}\right)$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi f_c n}{f_s}\right) = \cos\left(\frac{2\pi f_c n}{f_s} + 2k\pi n\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Com isso:

$$\frac{2\pi f_c n}{f_s} + 2k\pi n = \frac{n\pi}{2}$$

Multiplicando tudo por $\frac{1}{n\pi}$:

$$\frac{2f_c}{f_s} + 2k = \frac{1}{2}$$

- Com $k=0$

$$\frac{2f_c}{f_s} = \frac{1}{2} \rightarrow f_c = \frac{1}{4} \cdot f_s = \frac{1}{4} \cdot 5000 = 1250\,Hz$$

- Com $k=1$

$$\frac{2f_c}{f_s} + 2 \cdot 1 = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2f_c}{f_s} = \frac{1}{2} - 2 \rightarrow \frac{2f_c}{f_s} = -\frac{3}{2} \rightarrow f_c = -\frac{3}{4} \cdot f_s$$

$$f_c = -\frac{3}{4} \cdot 5000 = -3750\,Hz$$

Portanto:

- Sinal 1: $x(t) = \cos(2\pi 1250 t)$
- Sinal 2: $x(t) = \cos(-2\pi 3750 t)$

6) Um filtro digital, implementado em um circuito integrado DSP, é descri-
to pelo equação de diferença linear com coeficientes constantes:

$$y[n] = x[n] - 3y[n-1] - 2y[n-2]$$

Para analisar o desempenho do filtro, mede-se a resposta à entrada $\delta[n]$.
Entretanto, antes da aplicação da entrada, os registradores internos de ar-
mazenamento não são zerados. As condições iniciais são $y[-1]=1$ e $y[-2]=1$.

Qual a resposta do filtro?

$$Y[z] = X[z] - 3\left[\frac{1}{z}Y[z] + y[-1]\right] - 2\left[\frac{1}{z^2}Y[z] + \frac{1}{z}y[-1] + y[-2]\right]$$

$$Y[z] = 1 - \frac{3}{z}Y[z] - 3y[-1] - \frac{2}{z^2}Y[z] - \frac{2}{z}y[-1] - 2y[-2]$$

$$Y[z] = 1 - \frac{3}{z}Y[z] - 3\cdot 1 - \frac{2}{z^2}Y[z] - \frac{2}{z}\cdot 1 - 2\cdot 1$$

$$Y[z] = 1 - \frac{3}{z}Y[z] - 3 - \frac{2}{z^2}Y[z] - \frac{2}{z} - 2$$

$$Y[z] = -4 - \frac{3}{z}Y[z] - \frac{2}{z^2}Y[z] - \frac{2}{z}$$

$$Y[z] + \frac{3}{z}[z] + \frac{2}{z^2} = -4 - \frac{2}{z}$$

$$Y[z]\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{2}{z^2}\right) = -4 - \frac{2}{z}$$

• Multiplicando tudo por $z^2$:

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) = -4z^2 - 2z$$

$$Y[z] = \frac{-4z^2 - 2z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{-4z^2 - 2z}{(z+1)(z+2)}$$

$$Y[z] = \frac{z(-4z-2)}{(z+1)(z+2)}$$

$$\frac{Y[z]}{z} = \frac{-4z-2}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2}$$

$$A = \frac{-4\cdot(-1) - 2}{-1+2} = \frac{4-2}{1} = 2$$

$$B = \frac{-4\cdot(-2) - 2}{-2+1} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$\frac{Y[z]}{z} = \frac{2}{z+1} - \frac{6}{z+2}$$

$$Y[z] = 2\left(\frac{z}{z+1}\right) - 6\left(\frac{z}{z+2}\right)$$

$$y[n] = \left[2(-1)^n - 6(-2)^n\right] u[n]$$

7) Sendo $X[z] = \frac{z}{z-0,1} + \frac{z}{z-0,2} + \frac{z}{z-0,3}$

(i) $x[n] = \left[-(0,1)^n - (0,2)^n - (0,3)^n\right] u[-n-1]$

(ii) $x[n] = \left[(0,1)^n + (0,2)^n + (0,3)^n\right] u[n]$

(iii) $x[n] = (0,1)^n u[n] + \left[-(0,2)^n - (0,3)^n\right] u[-n-1]$

(iv) $x[n] = -(0,3)^n u[-n-1] + \left[(0,2)^n + (0,1)^n\right] u[n]$