Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Santa Catarina
Campus São José
Área de Telecomunicações
ELM20704 – Eletromagnetismo
Professor: Bruno Fontana da Silva
2014-1

Ondas EM no Espaço Livre (Vácuo)

As considerações do meio espaço livre (vácuo) são as seguintes:

- Condutividade: $\sigma = 0\ (\mathrm{S/m})$ ou $\sigma \ll \omega\varepsilon$
- Permissividade: $\varepsilon = \varepsilon_0\ (\mathrm{F/m})$
- Permeabilidade: $\mu = \mu_0\ (\mathrm{H/m})$

em que $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular da onda.

Nessas condições, as equações de Maxwell são:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}$$

Devido às propriedades dos fasores de vetores estudados, podemos reescrever as equações de Maxwell no espaço livre na forma fasorial, resultando em:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_s = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_s = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_s$$

as quais são as quatro equações de Maxwell em notação fasorial para variação senoidal no tempo no espaço livre (vácuo).

Equação de Helmholtz para a Onda do Campo Elétrico

Dadas essas equações, gostar-se-ia de obter a forma senoidal de regime permanente da equação da onda eletromagnética. Da equação $\nabla \times E_s = -j\omega\mu_0 H_s$, aplica-se o rotacional em ambos os lados,

$$\nabla \times (\nabla \times E_s) = \nabla \times (-j\omega\mu_0 H_s)$$

Aplicando propriedades do operador rotacional, obtém-se

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s$$

da qual, aplicando as equações de Maxwell no espaço livre, com $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$ e $\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_s$, encontra-se

$$-\nabla^2 \mathbf{E}_s = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_s$$

Essa equação pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k_0^2 \mathbf{E}_s$$

em que k_0, o número de onda do espaço livre, é definido como

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

A equação em destaque é conhecida como equação de Helmholtz. Tomando apenas a componente E_{xs} do fasor de vetor $\mathbf{E}_s$, a equação fica

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{xs} = -k_0^2 \mathbf{E}_{xs}$$

cuja expansão do operador ∇^2 leva à equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{xs} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_{xs} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{xs} = -k_0^2 E_{xs}$$

Para simplificar o problema, assuma que $E_{xs}(z)$, ou seja, é invariável em relação à x e y. Assim dois termos das derivadas parciais serão nulos, resultando na derivada ordinária de segunda ordem:

$$\frac{d^2}{dz^2} E_{xs} = -k_0^2 E_{xs}$$

A última equação pode ser facilmente resolvida por inspeção, resultando em

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-jk_0 z}$$

Voltando da forma fasorial para a forma real do vetor, inserimos novamente o termo $e^{j\omega t}$ e tiramos a parte real:

$$E_x(z,t) = \Re\{E_{xs} e^{j\omega t}\} = E_{x0} \cos(\omega t - k_0 z)$$

na qual E_{x0} é o valor de amplitude de E_x quando $t = 0$ e $z = 0$.

Velocidade de Propagação e Comprimento de Onda

Da equação da onda, sabemos que ω é a frequência temporal em $\mathrm{rad/s}$. Da mesma forma, podemos interpretar k_0 como a “frequência espacial”, a qual mede o deslocamento de fase por unidade de distância do eixo z (por exemplo, $\mathrm{rad/m}$). A constante k_0 também é conhecida como constante de fase da onda planar uniforme no espaço livre.

Observe que $\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ tem valor aproximado de $1/(3\times 10^8)\ \mathrm{m/s}$, que é o recíproco da velocidade da luz:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \cong 3\times 10^8 \quad \mathrm{m/s}$$

Pode-se escrever então $k_0 = \omega/c$ e a equação fica:

$$E_x(z,t) = E_{x0}\cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)$$

A natureza de propagação dos campos expressa pela equação de onda anterior agora fica clara. Suponha que um instante de tempo fixo $t = 0$. A equação anterior fica:

$$E_x(z,0) = E_{x0}\cos\left(-\omega\frac{z}{c}\right) = E_{x0}\cos(k_0 z)$$

ou seja, uma simples função periódica que se repete a cada distância incremental λ, conhecida como comprimento de onda. A restrição para periodicidade é $k_0\lambda = 2\pi$, portanto:

$$\underbrace{\lambda = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{f}}_{\substack{\textit{válida no}\\ \textit{espaço livre (vácuo)}}} \quad (m)$$

Suponha agora um ponto qualquer da função cosseno, por exemplo seus picos positivos. A ocorrência de um pico positivo se dá quando o argumento do cosseno é múltiplo inteiro de2π. Considere o m-ésimo pico positivo da onda, essa condição fica:

$$k_0 z = m2\pi$$

Considere agora o argumento do cosseno da onda original, variante no tempo. Tem-se então:

$$\omega t - k_0 z = m2\pi$$

Observa-se então que, conforme o tempo aumenta (o que acontece naturalmente), a posição de z deve aumentar também para satisfazer o ponto $m2\pi$ arbitrário. Portanto, o ponto de pico positivo (e consequentemente a onda toda) se move (propaga) na direção $\mathbf{a}_z$.

A velocidade de propagação, ou velocidade de fase da onda, considerando o espaço livre, é dada pela velocidade da luz c.

As ondas resultantes da solução da equação de Helmholtz são chamadas ondas viajantes. A direção de propagação no eixo z pode ser invertida se mudarmos o sinal de $\omega t \mp k_0 z$ na solução da equação diferencial.

Obtendo o Campo Magnético a partir do Campo Elétrico

Voltando às equações de Maxwell, agora que temos o campo elétrico,

$$E_x(z,t) = \Re\{E_{xs}e^{j\omega t}\} = E_{x0}\cos(\omega t - k_0 z)$$

vamos determinar o campo magnético. Dado $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ é facilmente obtido por

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s$$

equação a qual é bastante simplificada pelo fado de uma única componente $\mathbf{E}_{xs}(z)$,

$$\frac{d}{dz}E_{xs} = -j\omega\mu_0 H_{ys}$$

Usando a forma fasorial de $E_x(z,t)$, tem-se

$$H_{ys} = -\frac{1}{j}\frac{1}{\omega\mu_0}(-jk_0)E_{x0}e^{-jk_0 z}$$

$$H_{ys} = E_{x0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}e^{-jk_0 z}$$

que na forma instantânea fica

$$H_{ys}(z,t) = E_{x0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t - k_0 z)$$

em que E_{x0} é assumido como um número real.

Dessa solução, conclui-se que o campo elétrico $\mathbf{E}$ orientado na direção $\mathbf{a}_x$, o qual se propaga na direção positiva $\mathbf{a}_z$, é acompanhado por um campo magnético $\mathbf{H}$ orientado na direção $\mathbf{a}_y$.

Impedância Intrínseca do Espaço Livre

Além disso**, a taxa de relação entre as intensidades de campos elétrico e magnético é uma constante** dada por

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Usando teoria de circuitos, diríamos que E_x e H_y estão em fase, entretanto esse conceito se refere tanto ao tempo quanto ao espaço.

Estamos acostumados a assumir como verdade que, em problemas de circuitos elétricos, a corrente $I_m \cos(\omega t)$ tem seu valor máximo de amplitude I_m através de todo um ramo série de um circuito em $t = 0$ s.

As equações de $E_{xs}(z, t)$ e $H_{ys}(z, t)$ mostram, entretanto, que o valor máximo de E_x de H_y ocorre quando $\omega(t - z/c\,)$ é um múltiplo inteiro de 2π radianos; nem o campo elétrico nem o magnético é máximo em todos os lugares durante o mesmo instante de tempo.

É curioso entretanto que a razão entre as duas grandezas, ambas variando no tempo e no espaço, seja constante em todos os lugares a qualquer instante.

Essa razão é conhecida como **impedância intrínseca**, definida como

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (\Omega)$$

a qual, no espaço livre, possui o valor característico de

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ \Omega = 120\pi\ \Omega$$

A onda é chamada onda planar uniforme porque o seu valor é uniforme através de qualquer plano para $z =$ constante. Ela representa um fluxo de energia na direção positiva $\mathbf{a}_z$. **Tanto o campo elétrico como o magnético são perpendiculares à direção de propagação**, ou seja, a onda planar uniforme é **uma onda eletromagnética transversal**.

Uma onda planar uniforme não pode existir na prática, pois se propaga infinitamente em pelo menos duas dimensões e representa uma quantidade infinita de energia. O campo distante de uma antena transmissora, entretanto, é essencialmente uma onda planar uniforme dentro de uma região limitada; por exemplo, um sinal de radar colidindo com um alvo distante é aproximadamente uma onda planar uniforme.

Embora tenhamos considerado apenas uma onda variando senoidalmente, no tempo e no espaço, uma combinação razoável de soluções para a equação da onda pode ser realizada para obter uma onda de qualquer formato desejável. O somatório de infinitas harmônicas pelo uso da série de Fourier pode produzir uma onda periódica de formato triangular ou quadrado tanto no espaço quanto no tempo. Ondas não periódicas podem ser obtidas da solução básica por métodos de integração de Fourier. Esses são exemplos de tópicos bastante avançados de eletromagnetismo.

Exercícios

1) A amplitude do campo elétrico da onda planar uniforme se propagando na direção $\mathbf{a}_z$ é 250 V/m. Se $\mathbf{E} = E_x\mathbf{a}_x$ e $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$, encontre:
   a. A frequência.
   b. O comprimento de onda.
   c. O período.
   d. A amplitude de $\mathbf{H}$.

   Respostas: 159 kHz, 1.88 km; 6.28 μs; 0.663 A/m

2) Seja $\mathbf{H}_s = (2\angle -40°\mathbf{a}_x - 3\angle 20°\mathbf{a}_y)e^{j0.07z} \text{ A/m}$ para uma onda planar viajando no espaço livre. Encontre:
   a. ω.
   b. H_x em $P(1,2,3)$ no instante $t = 31 \text{ ns}$.
   c. $|\mathbf{H}|$ em $t = 0$ s na origem do sistema.

   Respostas: 21 Mrad/s, 1.93 A/m; 3.22 A/m

Referências Bibliográficas

[1] HAYT, W., BUCK,J. **Engineering Electromagnetics**, 2011.