DETERMINANTES

Determinante de uma matriz quadrada

- A toda matriz quadrada A está associado um número real, chamado determinante de A. Ele é obtido por meio de certas operações com os elementos da matriz.

- O determinante de uma matriz A pode ser indicado por det A ou, ainda, substituído-se os parênteses ou colchetes da matriz por barras.

Exemplo

- O determinante da matriz P abaixo pode ser indicado

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- ✓ Por det P;

- ✓ $\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

Determinantes de 1ª e 2ª ordem

- O **determinante** de uma matriz quadrada de **1ª ordem** (matriz 1 x 1) é igual ao valor de seu único elemento.

$$A = [a_{11}] \quad \Rightarrow \quad \det A = a_{11}$$

✓ Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = 2$$

Determinantes de 1ª e 2ª ordem

- O **determinante** de uma matriz quadrada de **2ª ordem** (matriz 2 x 2) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, **menos** o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{12} \,.\, a_{21}$$

$-$ $\qquad$ $+$

Exemplos

- Calcule o determinante das matrizes M e N abaixo.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

✓ $\text{Det } M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 3.5 = 2 - 15 = -13$

✓ $\text{Det } N = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-5).4 - 0.(-1) = -20$

Exemplos

- Resolver a equação $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & x+1 \end{vmatrix} = 2.$

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & x+1 \end{vmatrix} = x.(x+1) - 2.x = x^2 + x - 2x = x^2 - x$$

$$x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$$

Determinantes de 3ª ordem

- **Para calcular determinantes de 3ª ordem, usamos um dispositivo chamado Regra de Sarrus. Veja os passos a serem seguidos, em que tomamos um determinante de uma matriz genérica A.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Determinantes de 3ª ordem

$$M = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\text{Det } A = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$

$$- a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$$

Exemplos

- Calcule o determinante da matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right.$$

$$1.2.3 + (-3).0.(-2) + 2.4.1 \;= 6 + 0 + 8 \;= 14$$

$$-[2.2.(-2)] \;-[1.0.1] \;-[(-3).4.3] \;= 8 - 0 + 36 \;= 44$$

$$\text{Det A} = 14 + 44 = 58$$

Exemplos

- Encontrar os valores de x que anulam o determinante $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & x & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & 2 & 3 & x & 2 \\ -1 & x & 4 & -1 & x \\ -3 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right.$$

$x.x.1 + 2.4.(-3) + 3.(-1).0 = x^2 - 24$

$-[3.x.(-3)] - [x.4.0] - [2.(-1).1] = 9x + 2$

Det A $= x^2 + 9x - 22 \Rightarrow x^2 + 9x - 22 = 0 \Rightarrow$ $x = -11$ ou $x = 2$

DETERMINANTES DE MATRIZES N X N

Matriz reduzida

- Dada uma matriz quadrada A, de ordem $n \geq 2$, chama-se matriz reduzida de A pelo elemento a_{ij} à matriz de ordem $n-1$ que se obtém de A suprimindo sua linha i e sua coluna j.

- Indicaremos a matriz reduzida de A pelo elemento a_{ij} com B_{ij}.

- O determinante da matriz reduzida é chamado de menor complementar.

Exemplo

- Considerando a matriz A abaixo, obter as matrizes reduzidas de A pelos elemento a_{21} e a_{13}.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -7 \\ 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_{13} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Co-fator de um elemento de uma matriz

- Numa matriz quadrada A, de ordem $n \geq 2$, chama-se co-fator do elemento a_{ij} (simbolicamente A_{ij}) o número real definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\det B_{ij}.$$

- Obs.: B_{ij} é a matriz reduzida de A pelo elemento a_{ij}.

Exemplo

- Considerando a matriz A abaixo, calcular A_{13}, co-fator do elemento a_{13} e A_{23}, co-fator do elemento a_{23}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\, \text{Det } B_{ij}$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \,.\, \text{Det } B_{13}$$

$$A_{13} = (-1)^{4} \,.\, (24 - 4) = 1 \,.\, 20 = 20$$

Exemplo

- Considerando a matriz A abaixo, calcular A_{13}, co-fator do elemento a_{13} e A_{23}, co-fator do elemento a_{23}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\, \mathrm{Det}\ B_{ij}$$

$$B_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \,.\, \mathrm{Det}\ B_{23}$$

$$A_{13} = (-1)^{5} \,.\, (16 - 10) = (-1) \,.\, 6 = -6$$

Teorema de Laplace

- **O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, n ≥ 2, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos respectivos co-fatores.**

Exemplo

- Calcular, utilizando o teorema de Laplace, o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } A = a_{12}.A_{12} + a_{22}.A_{22} + a_{32}.A_{32} + a_{42}.A_{42}$$

$$\text{Det } A = 3.A_{12} + 0.A_{22} + 0.A_{32} + 2.A_{42}$$

$$\text{Det } A = 3.A_{12} + 2.A_{42}$$

Exemplo

- Calcular, utilizando o teorema de Laplace, o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Cálculo de A_{12}:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \,.\, \text{Det } B_{12}$$

$$A_{12} = (-1)^{3} \,.\, 10 = (-1) \,.\, 10 = -10$$

Exemplo

- Calcular, utilizando o teorema de Laplace, o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cálculo de A_{42}:

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \,.\, \text{Det } B_{42}$$

$$A_{42} = (-1)^{6} \,.\, 31 = 31$$

Exemplo

- Calcular, utilizando o teorema de Laplace, o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } A = a_{12}.A_{12} + a_{22}.A_{22} + a_{32}.A_{32} + a_{42}.A_{42}$$

$$\text{Det } A = 3.A_{12} + 2.A_{42}$$

$$\text{Det } A = 3.(-10) + 2.31 = 32$$

MATRIZ INVERSA

Matriz inversa - Teorema

- Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A inversa de A existe se, e somente se, det A ≠ 0.

- A inversa da matriz A (caso exista) é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [\text{cof } A]^t$$

  - ✓ [cof A] = matriz dos cofatores de A, também chamada de matriz adjunta de A.

Exemplo

- Determine a inversa da matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

✓ Vamos obter o co-fator de cada elemento de A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \,.\, \text{Det}\,[-3] \Rightarrow A_{11} = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \,.\, \text{Det}\,[1] \Rightarrow A_{12} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \,.\, \text{Det}\,[-5] \Rightarrow A_{21} = 5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \,.\, \text{Det}\,[2] \Rightarrow A_{22} = 2$$

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo

- Determine a inversa da matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

✓ A inversa da matriz A é obtida assim

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} . [\text{cof } A]^t$$

$$\text{Det } A = 2.(-3) - (-5).1 = -1$$

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{cof } A)^t = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo

- Determine a inversa da matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- A inversa da matriz A é obtida assim

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [\text{cof } A]^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedades dos determinantes

P1. O determinante de uma matriz vale zero se ele tem:

- ✓ **Uma linha (ou coluna) nula.**

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

- ✓ **Duas linhas (ou colunas) iguais ou proporcionais.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

Propriedades dos determinantes

P2. se trocarmos de posição, entre si, duas linhas (ou colunas) de um determinante, ele troca de sinal.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Propriedades dos determinantes

P3. Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) de um determinante por uma constante k, ele fica multiplicado por k.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13$$

$$\begin{vmatrix} 2.3 & -5 \\ 1.3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 39$$

$$13.\ 3 = 39$$

Propriedades dos determinantes

P4. O determinante do produto de duas matrizes é o produto de seus determinantes (teorema de Binet).

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

✓ **Exemplo**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 16 & -10 \end{pmatrix}$$

Det A = 2 Det B = 14 Det AB = 28

Propriedades dos determinantes

P5. Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero.

$$\text{A é inversível} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Exemplo

- Calcular o parâmetro m para que seja invertível a matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 3 & m & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{Det } A = m^2 - 4m - 5$$

$$\Rightarrow \quad m^2 - 4m - 5 \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad m \neq -1 \text{ e } m \neq 5$$

Propriedades dos determinantes

P6. Se uma matriz é invertível, o determinante de sua inversa é o inverso de seu determinante.

$$\text{Det } A^{-1} \Leftrightarrow 1/\det A$$

Exemplo

- **Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, com det A = 2 e det B = 6, calcular det $(B.A^{-1})$.**

Det $(B.A^{-1})$ = det B . det A^{-1} = 6 . 1/2 = 3

Propriedades dos determinantes

P7. O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

$$\boxed{\text{Det } A^t \Leftrightarrow \text{det } A}$$

- ✓ **Exemplo**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } A = 10 \qquad\qquad \text{Det } A^t = 10$$

Propriedades dos determinantes

P8. Se forem nulos todos os elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal, o determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

✓ Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{Det } A = 2.(-1).3 = -6$$

➢ A matriz A é triangular.

Propriedades dos determinantes

P9. Um determinante não se altera se substituirmos uma de suas filas por ela própria somada com uma outra paralela multiplicada por uma constante (Teorema de Jacobi).

- **Exemplo**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 2.3 = 5 - 6 = -1$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 + (-2).2} & 2 \\ \boxed{3 + (-2).5} & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = -15 - (-14) = -1$$

Observação

- **A aplicação dessa propriedade pode facilitar o cálculo de certos determinantes, principalmente os de 4ª ordem ou de ordem superior.**

Exemplo

- Calcular o determinante abaixo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Vamos adicionar à segunda coluna a 1ª coluna multiplicada por –2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+(-2).1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+(-2).1 & 2 & 2 \\ 1 & 2+(-2).1 & 3 & 3 \\ 1 & 2+(-2).1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Det A = –1. A_{12}

Exemplo

- Calcular o determinante abaixo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Cálculo de A_{12}:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$Det = (-1).(-2) = 2$$

REGRA DE CHIÓ

Permite baixar a ordem de um determinante facilitando o seu cálculo.

Etapas

- **1ª Etapa: eliminamos da matriz A a linha i e a coluna j do elemento $a_{ij} = 1$.**

- **2ª Etapa: Subtraímos de cada um dos elementos restantes de A o produto dos elementos eliminados que se encontra na sua linha e na sua coluna, obtendo assim uma matriz B de ordem $n - 1$.**

- **3ª Etapa: o determinante de A é igual a**

$$(-1)^{i+j} \cdot \det B.$$

Exemplo

- Calcular o determinante abaixo utilizando a regra de Chió.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Vamos aplicar a regra de Chió a partir do elemento a_{24}.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-(1.0) & 3-(4.0) & -1-(2.0) \\ 3-(1.0) & 2-(4.0) & 2-(2.0) \\ -1-(1.2) & 2-(4.2) & 3-(2.2) \end{vmatrix}$$

Exemplo

- Calcular o determinante abaixo utilizando a regra de Chió.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Vamos aplicar a regra de Chió a partir do elemento a_{24}.

$$\begin{vmatrix} 2-(1.0) & 3-(4.0) & -1-(2.0) \\ 3-(1.0) & 2-(4.0) & 2-(2.0) \\ -1-(1.2) & 2-(4.2) & 3-(2.2) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Det} = (-1)^{2+4}.\ \det B = (-1)^6.\ (-13) = -13$$