Fluidos: Hidrostática e Hidrodinâmica

Estática dos Fluidos

Sólido: Volume e forma definida

Líquido: Volume bem definido; não tem forma.

Gás: Não tem volume nem forma bem definidos.

Líquidos e gases fluem livremente.

Forças volumétricas e superficiais:

Tensões num meio material

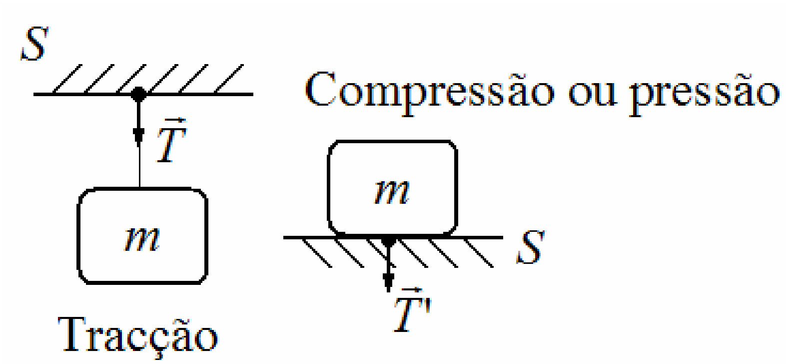
Considere um elemento de superfície num fluído:

$$\text{Força} \propto \text{Área}.$$

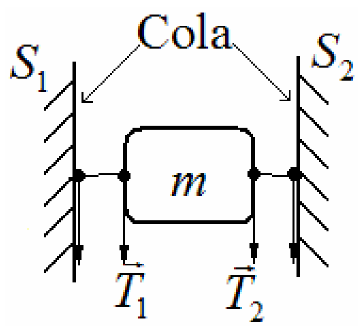
$$\frac{\text{Força}}{\text{Área}} \equiv \text{Tensão}$$

Tensão:

- Normal



- Tangencial



cisalhamento (shear)

Diferença fundamental entre sólidos e fluidos: Fluidos não equilibram forças tangenciais por menores que sejam.

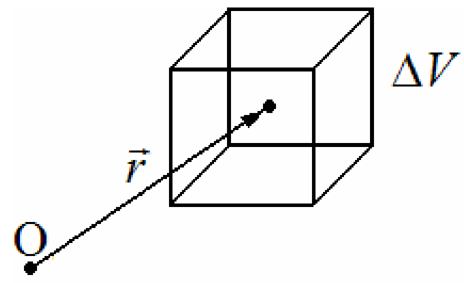
$\rightarrow$ Escoamento

$\therefore$ Num fluído em equilíbrio $(v = 0)$ não há tensões tangenciais.

Pressão num fluído: (em equilíbrio)

Densidade num ponto P:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

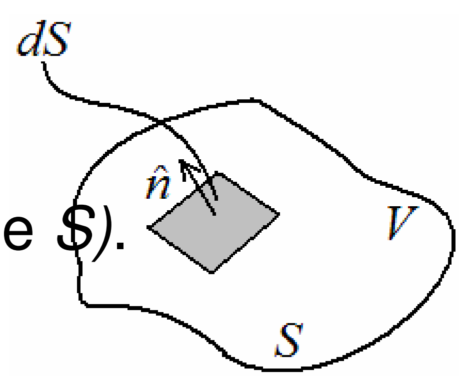


Demonstra-se que:

A pressão no interior dum fluído só depende da posição e não da orientação do elemento de superfície.

A força superficial sobre um elemento dS: $d\vec{F} = -P\hat{n}dS$

(sentido > 0 de $\hat{n}$ para fora de S).

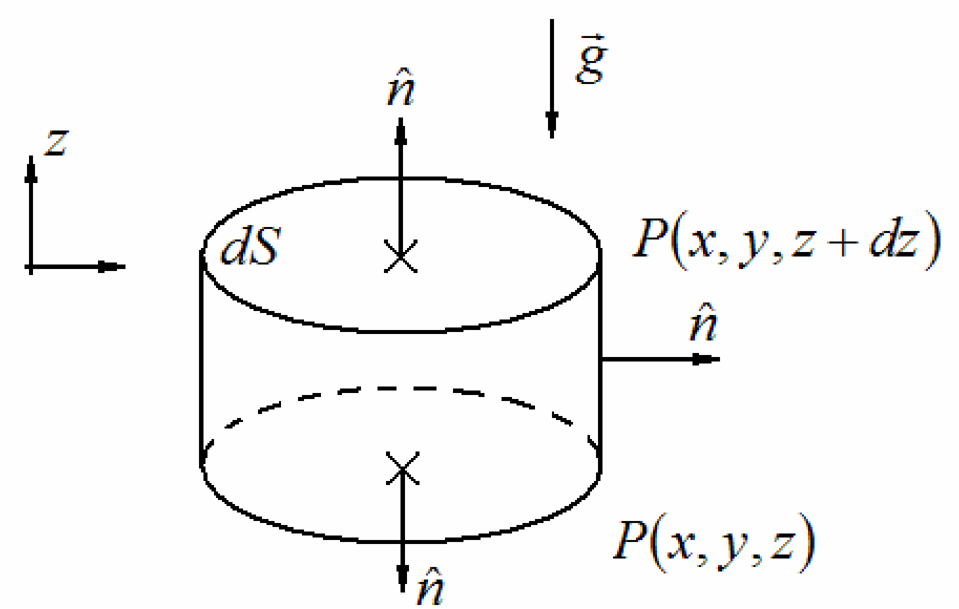


$$\boxed{p = \lim_{\Delta S \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \right| = \left| \frac{d\vec{F}}{dS} \right|}$$

Equilíbrio num campo de forças:

(gravidade)

Consideremos um volume ΔV de fluído suposto cilíndrico (o resultado não depende da forma do elemento de fluído).



$\vec{f}$ = força/volume

Gravítica sobre o volume ΔV:

$$\Delta\vec{F} = \Delta m\vec{g} = \rho\Delta V\vec{g}$$
$$= \vec{f}\Delta V$$

$$\vec{f} = \rho\vec{g} \qquad \Delta V = \Delta S\Delta z$$

Forças de pressão sobre superfícies:

(Pressão lateral equilibra-se)

$$\left[-p(x,y,z+dz)+p(x,y,z)\right]dS$$

Ora:

$$p(x,y,z+dz)-p(x,y,z)=\frac{\Delta p}{\Delta z}\Delta z \qquad x,y\ \text{const.}$$

$$\underset{\Delta z\to 0}{=}\frac{\partial p}{\partial z}(x,y,z)dz$$

<u>Em equilíbrio</u>:

$$\left(+f_z-\frac{\partial p}{\partial z}\right)dSdz=0$$

Resultante das forças externas é nula.

$$\Rightarrow f_z=\frac{\partial p}{\partial z}$$

Densidade de força volumétrica é igual à variação de pressão, num volume elementar.

Para:

$$f_z = -\rho g$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g} < 0$$

No campo gravitacional, a pressão decresce com a altitude e cresce com a profundidade. A taxa de variação com a altitude é dada pelo peso específico (peso por unidade de volume).

No cilindro a força de pressão sobre a base inferior excede aquela exercida sobre a base superior pelo peso do fluído contido no cilindro.

$$\frac{\partial p}{\partial z} dSdz = fdSdz = -\rho g dSdz$$

Fluído incompressível no campo gravitacional

<u>Lei de Stevin</u>: A pressão no interior dum fluído aumenta linearmente com a profundidade.

Suponha $\rho = \rho_0$ constante. (Ex. água)

$p : 1 \rightarrow 100\,\mathrm{atm}$ $\rho \to \rho_0 + 0.5\%\ \rho_0$

Suponhamos uma força volumétrica conservativa:

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z} U$$

$U = mgz$ (energia potencial gravíticica)

$$f_z = -\frac{d}{dz} u$$

$u = \frac{mgz}{V} = \rho_0 g z$ Energia por unidade de volume.

$$\therefore\ f_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{-u = p + \text{constante}}$$

Lei da Hidrostática

(Equilíbrio em termos de potenciais)

Superfícies isobáricas são superfícies equipotenciais.

$$\therefore\ p(z) = -\rho_0 g z + \text{constante}$$

Lei de Stevin: A pressão num fluido aumenta linearmente com a profundidade.

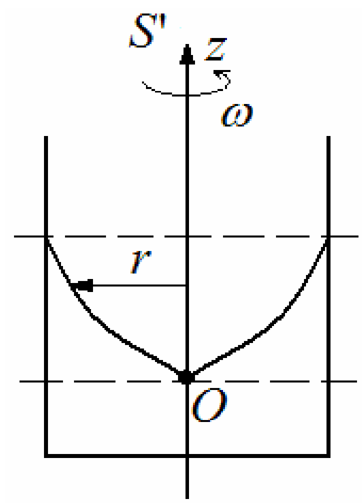
$$\Delta P = -\rho g \Delta z$$

(sentido positivo de z para cima)

ou $\boxed{p(z) + \rho_0 g z = \text{constante}}$

Líquido em rotação

Após algum tempo o líquido gira rigidamente junto com o recipiente.



Num referencial *S*' que gira com o recipiente o líquido está em equilíbrio.

Forças sobre o fluído: gravítica e centrífuga.

$$\Delta\vec{F}_c = \Delta m\omega^2 r\hat{r}$$
$$= \rho\Delta V\omega^2 r\hat{r}$$

$$\vec{f}_c = \frac{\Delta\vec{F}_c}{\Delta V} = \rho\omega^2 r\hat{r}$$

Densidade de energia centrífuga:

$$-\frac{du_c}{dr}\hat{r} = \vec{f}_c = \rho\omega^2 r\hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(r) = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2}$$

$$\therefore\ p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + \text{constante}$$

No ponto O: $z = 0$, $r = 0$ e $p = p_0$ (atmosférica)

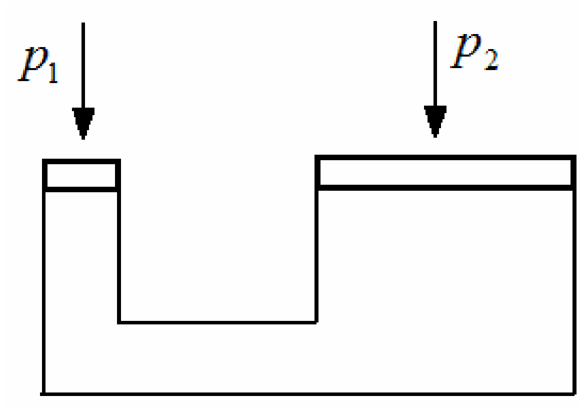
$$\therefore p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z$$

Equação superfície livre:

$p = p_0$ é $z = \frac{\omega^2}{2g}r^2$ (parabolóide).

Exemplos

1.Prensa hidráulica



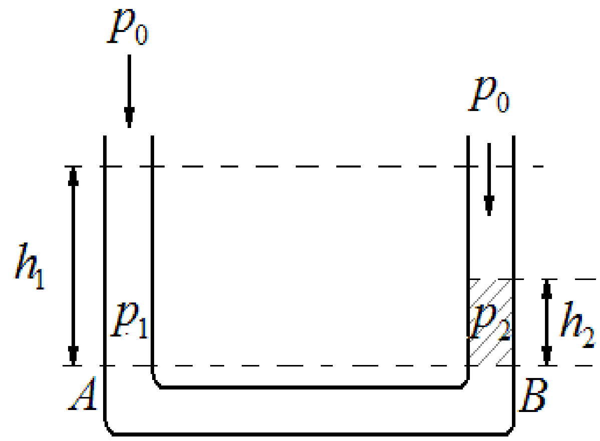
Lei de Stevin $\Rightarrow$

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\Rightarrow F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2} F_2\right) \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{10} \Rightarrow F_1 = \frac{F_2}{10}$$

Podemos equilibrar uma força F_2 com uma força F_1 10x menor.

2.Vasos Comunicantes; 2 líquidos não mescíveis:



líquidos não mescíveis
$\rho_1 \neq \rho_2$

Os líquidos sobem alturas diferentes em relação ao plano AB que passa todo pelo mesmo fluído.

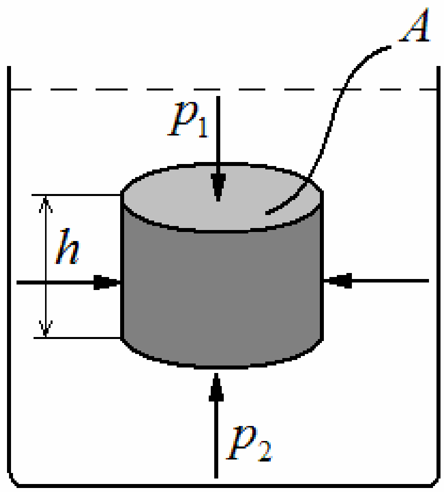
Se P é a pressão sobre AB temos:
Lei de Stevin

$$\Rightarrow p = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

$\rightarrow$ Medida de densidades relativa.

Princípio de Arquimedes:



Pressões laterais anulam-se 2 a 2 por simetria.

Lei de Stevin $\Rightarrow$

$p_2 - p_1 = \rho g h$

Resultante das forças superficiais pelo fluído sobre o cilindro é uma força vertical para cima:

$$F = p_2 A - p_1 A = \rho g h A = \rho g V = mg$$
$$V = hA$$

$m = \rho V \rightarrow$ Massa de fluído deslocada pelo cilindro

$\therefore \vec{F} = mg\hat{k} = -\vec{P} \leftarrow$ Peso de massa de fluído deslocada.

$\therefore$ A resultante das forças superficiais sobre o cilindro é igual e contrária ao peso do fluído deslocado.

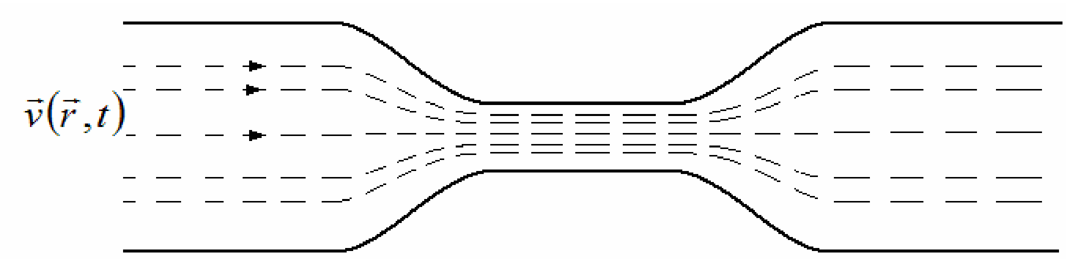
(Princípio de Arquimedes)

Hidrodinâmica

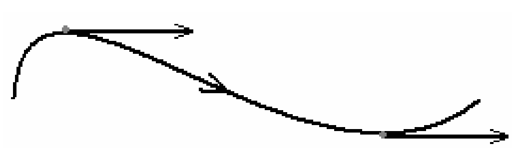
<u>Abordagens:</u>

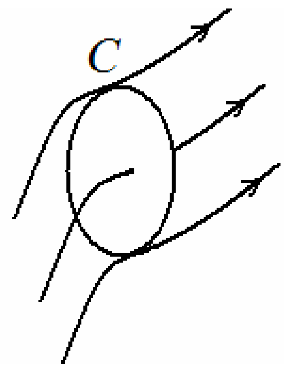
- <u>Lagrange</u>: Cálculo de $\vec{r}(t)$ para qualquer partícula $\rightarrow$ descrição do movimento do fluido.
- <u>Euler</u>: Fixa-se um ponto $\vec{r}$ do fluido e descreve-se como varia com o tempo a velocidade nesse ponto.

  $\rightarrow$ $\vec{v}(\vec{r},t)$ (campo vectorial)



<u>Linha de corrente</u>: Linha tangente em cada ponto ao vector $\vec{v}$ nesse ponto.





Tubo de corrente: Superfície formada, num dado instante, por todas as linhas de corrente que passam pelos pontos duma dada curva fechada C no fluido.

Escoamento estacionário: $v = v(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})$.

Diferentes partículas do fluido passam (para todo o tempo) pelo mesmo ponto com a mesma velocidade embora $\vec{v}$ possa variar de ponto para ponto.

Resultado: 2 linhas de corrente nunca se podem cruzar

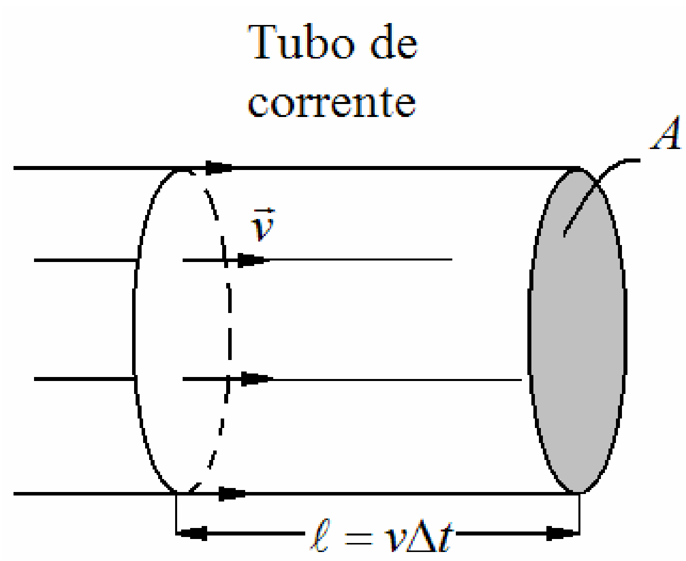
(Em regime estacionário, as partículas de fluido dentro de um tubo de corrente num dado instante nunca podem atravessar as paredes desses tubo.)

Leis de Conservação

- Massa
- Momento Linear
- Energia

→ Permitem obter informação do fluido sem a resolução pormenorizada das equações do movimento.

<u>Continuidade:</u> (massa)

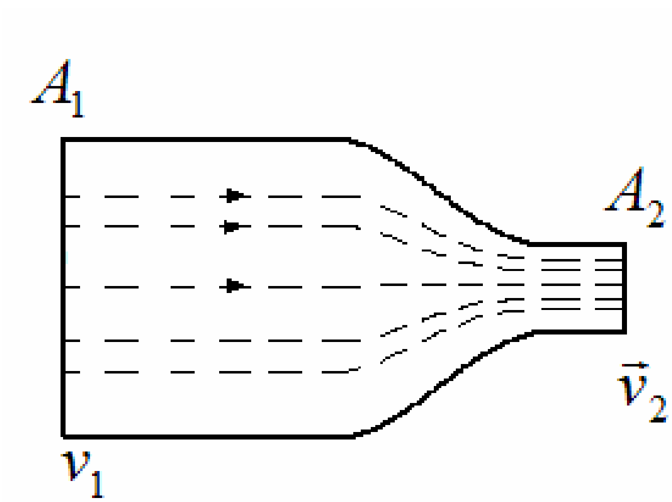


No intervalo de tempo Δt uma massa Δm atravessa secção A correspondente ao volume do cilindro de base A e altura $\ell = v\Delta t$.

$$\Delta m = \rho A v \Delta t$$

Fluxo de massa = $\dfrac{\Delta m}{A\Delta t} = \rho v$

Em <u>regime estacionário</u>, toda a massa entra em A_1 e sai em A_2: (conservação de massa)



$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$$\boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$$

Fluido incompressível: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$Av =$ volume de fluido que atravessa *A* por unidade de tempo (taxa de escoamento).

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1}}$$

A velocidade é inversamente proporcional à área de secção transversal do tubo de corrente.

- Balanço de momento

(Forças num fluido em movimento):

Considere uma partícula de fluido de volume ΔV e massa Δm:

A equação do movimento é:

$$\Delta m \vec{a} = \Delta \vec{F}_V + \Delta \vec{F}_S$$

$\Delta\vec{F}_V$ = resultante forças volumétricas

$\Delta\vec{F}_S$ = resultante forças superficiais.

$$\Delta\vec{F}_V = \left(\Delta\vec{F}_{Vg}\right) + \left(\Delta\vec{F}_V\right)_{\text{visc}}$$

$$\downarrow$$

(Atrito no deslizamento de camadas fluidas (tensão tangencial)

Ora:

$$\Delta\vec{F}_V + \Delta\vec{F}_S = \left(\vec{f}_g - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta V \quad \text{(Fluidos Ideais)}$$

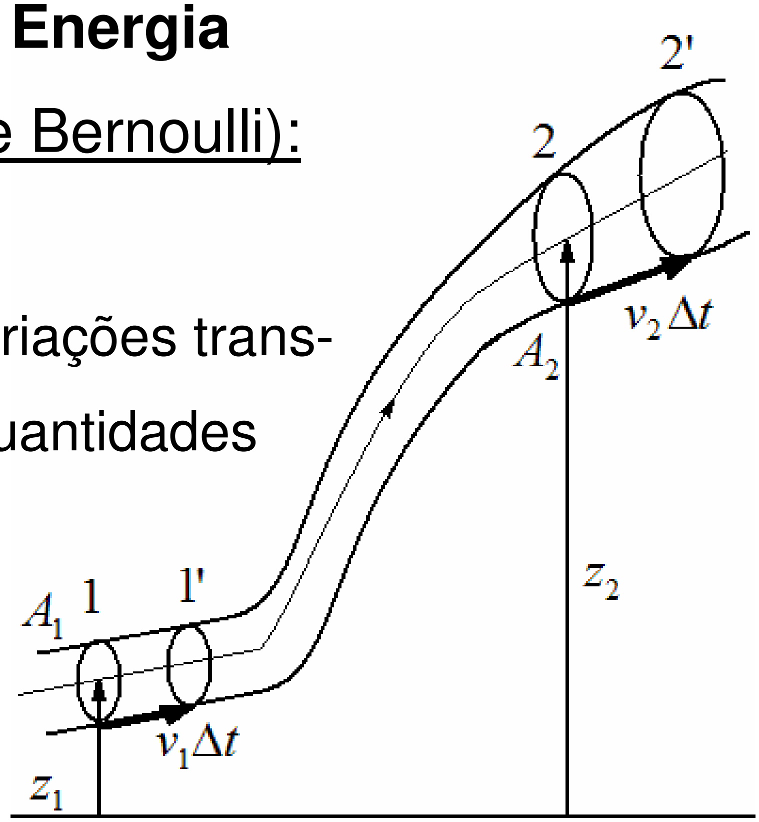
e $$\Delta m a = \rho \Delta V a \quad \text{(vertical)}$$

$$\therefore \boxed{\rho a_z = f_{gz} - \frac{\partial p}{\partial z}} \quad 2^{\text{a}} \text{ Lei (Fluido)}$$

Balanço de Energia

(Equação de Bernoulli):

Desprezar variações trans-
-versais de quantidades
físicas.



Considere o fluido entre secções 1 e 2:

em regime estacionário:

No intervalo de tempo Δt:

$\Delta m_1 = \Delta m_2$ $\rho = \text{constante}$

Variação energia cinética:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\Delta m_2 v_2{}^2 - \frac{1}{2}\Delta m_1 v_1{}^2$$

Trabalho realizado pela:

pressão

$$\left(p_1 A_1\right)\left(v_1 \Delta t\right) - \left(p_2 A_2\right)\left(v_2 \Delta t\right)$$

gravidade

$$-g\left(\Delta m_2 z_2 - \Delta m_1 z_1\right)$$

Pelo teorema <u>Trabalho-Energia</u>:

$$\frac{1}{2}\Delta m_2 {v_2}^2 - \frac{1}{2}\Delta m_1 {v_1}^2 = p_1 \underbrace{A_1 v_1 \Delta t}_{\frac{\Delta m_1}{\rho}} - p_2 \underbrace{A_1 v_1 \Delta t}_{\frac{\Delta m_2}{\rho}}$$

$$-g\left(\Delta m_2 z_2 - \Delta m_1 z_1\right)$$

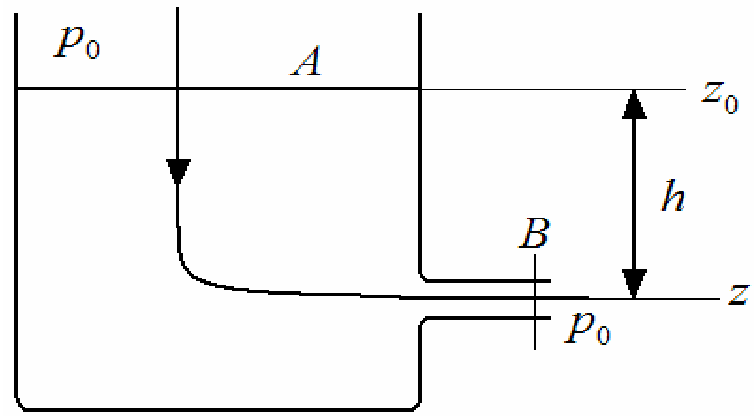
Como $\Delta m_1 = \Delta m_2$:

$$\boxed{\frac{1}{2}{v_2}^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{1}{2}{v_1}^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho}}$$

Lei de Bernoulli.

Aplicações

a) Fórmula de Torricelli



Pequeno orifício lateral

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = z_0 + \underbrace{\frac{v_0^2}{2g}}_{\approx 0} + \frac{p_0}{\rho g}$$

$$z_0 - z = \frac{v^2}{2g}$$

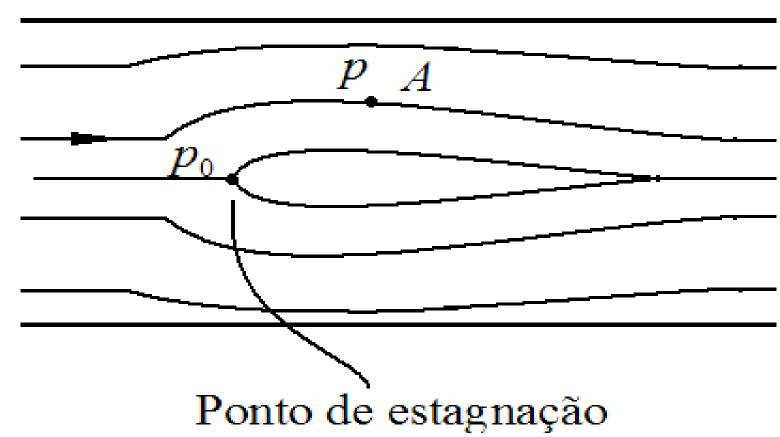
$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$ Torricelli 1636

A velocidade é a mesma que seria atingidaem queda livre de uma altura *h*.

b. Tubo de Pitot: (medição da pressão ou velocidade dum fluido em movimento).

$v_0 = 0$

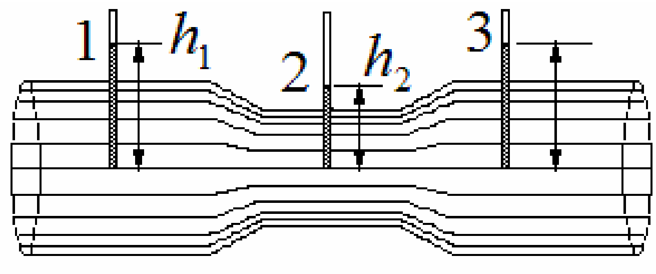


$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \text{constante}$$

$$\boxed{p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2}$$

A pressão no ponto de estagnação $p_0 > p$ – efeito dinâmico devido à velocidade zero no ponto de estagnação.

c)Fenómeno de Venturi (medição de velocidade de escoamento).



$$p_1 , v_1 , A_1 \qquad p_2 , v_2 , A_2$$

Equação Bernoulli sobre a linha central

$z_1 = z_2$.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^{\ 2} = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^{\ 2} \quad \text{... } \mathbf{(1)}$$

$$v_2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) v_1 \quad \text{(continuidade) ... } \mathbf{(2)}$$

$$\therefore v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$$

Nos pontos de estrangulamento, a velocidade de escoamento é maior e a pressão é menor.

Como

$$p_1 - p_2 = \left(p_0 + \rho g h_1\right) - \left(p_0 + \rho g h_2\right)$$
$$= \rho g\left(h_1 - h_2\right) = \rho g h \qquad \textbf{(3)}$$

Medição de velocidade:

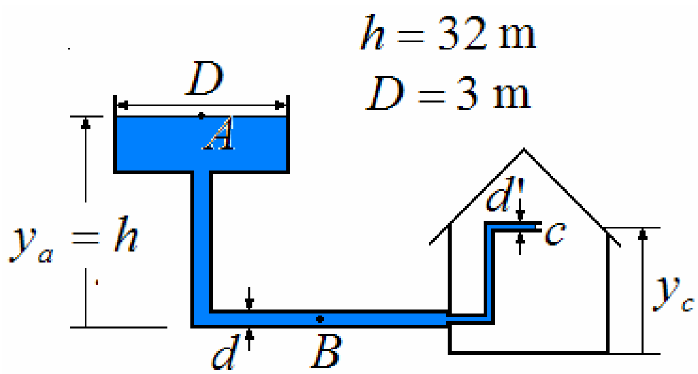
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^{\ 2} - v_1^{\ 2}\right) = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]v_1^{\ 2}$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1^{\ 2} - A_2^{\ 2}}{A_2^{\ 2}}\right)v_1^{\ 2}$$

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2gh}{A_1^{\ 2} - A_2^{\ 2}}}$$

(método de medição de velocidade)

Exemplo:



Um depósito de água com 32 m de altura e 3 m de diâmetro fornece água a uma casa. O cano horizontal na base da torre possui $d = 2.54$ cm. O tubo tem de fornecer água à taxa de $R = 0.0025$ m^3/s.

a) Se a água fluir à taxa máxima, qual a pressão no cano horizontal?

b) Um cano mais estreito, de diâmetro $d' = 1.27$ cm fornece água para o 2º andar da casa a uma distância 7.2 m acima do nível do solo. Qual a velocidade e pressão da água neste caso? Despreze viscosidade.

a) Aplicamos a eq. Bernoulli à linha de corrente A, B, C.

Nos pontos A e B:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A{}^2 + \rho g y_a = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B{}^2 + \rho g y_B$$

$$A : p_A = p_0 \quad y_a = h = 32 \text{ m}, \quad y_B = 0$$

$$p_B = p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\left(v_A{}^2 - v_B{}^2\right)$$

v_A e v_B podem determinar-se a partir de:

$v_A A_A = v_B A_B = R$ (taxa de escoamento)

$$\therefore v_A = \frac{R}{A_A} = \frac{0.0025}{\pi(1.5)^2} = 3.5\times10^{-4} \text{ m/s}$$

$$v_B = \frac{R}{A_B} = \frac{0.0025}{\pi(0.0127)^2} = 4.9 \text{ m/s}$$

Como $\frac{1}{2}\rho {v_A}^2 << \frac{1}{2}\rho {v_B}^2$:

$$p_B \cong p_0 + \rho g h - \frac{1}{2}\rho {v_B}^2$$

$$= 1.01\times10^5(\text{Pa}) + 10^3\times9.8\times32 - \frac{1}{2}10^3\times(4.9)^2$$

$$= 1.01\times10^5 + 3.14\times10^5 - 0.12\times10^5$$

$$= 4.03\times10^5 \text{ Pa}$$

N.B.: Se a água no cano horizontal não fluísse:

$p_B = 4.15\times10^5$ Pa $(v_B = 0)$ Estática

$\frac{1}{2}\rho v^2$ – é uma pressão dinâmica

b) Para $R =$ constante:

$$v_C = \frac{R}{A_C} = \frac{0.0025}{\pi(0.0064)} = 19.7 \text{ m/s}$$

Eq. Bernoulli:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A{}^2 + \rho g y_a = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C{}^2 + \rho g y_C$$

$$\begin{aligned} p_C &= p_0 + \frac{1}{2}\rho\left(v_A{}^2 - v_C{}^2\right) + \rho g\left(y_A - y_C\right) \\ &= 1.01\times10^5 - \frac{1}{2}\left(10^3\right)19.7 + 10^3 \times 9.8(32 - 7.2) \\ &= 1.01\times10^5 \text{ Pa} - 1.95\times10^5 \text{ Pa} + 2.43\times10^5 \text{ Pa} \\ &= 1.49\times10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Como $v_C > v_B (> v_A)$ a pressão dinâmica é maior em C do que em B. A pressão estática também é menor em C.

Unidades de Pressão

S.I. $1\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1$ Pascal = 1 Pa

1 atm = $1.013\times10^5 \ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (\text{Pa})$

1 mm Hg = 1.316×10^3 atm

1 bar = $10^5 \ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$