Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Instituto Federal de Santa Catarina

Campus São José

Área de Telecomunicações

ELM20704 – Eletromagnetismo

Professor: Bruno Fontana da Silva

2014-2

Eletrostática:

Fluxo Elétrico e Lei de Gauss para a Eletrostática

Lembrando da lei de Coulomb, do campo elétrico e do potencial elétrico para cargas puntiformes:

$$\mathbf{F} = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2}\mathbf{a}_r \qquad [N]$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = k\frac{Q}{R^2}\mathbf{a}_r \qquad \left[\frac{N}{C}\right] \equiv \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$V = \frac{U}{q} = \frac{\mathbf{F}\cdot R\mathbf{a}_r}{q} = \mathbf{E}\cdot R\mathbf{a}_R = k\frac{Q}{R} \qquad \left[\frac{Nm}{C}\right] \equiv \left[\frac{J}{C}\right] \equiv [V]$$

Nas equações acima, a constante k vale:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0},$$

e considerando as cargas no vácuo $(\varepsilon_r = 1)$, esse valor é aproximadamente

$$k = 9 \times 10^9 \quad \left[\frac{N/C}{C/m^2}\right].$$

Fluxo Elétrico

Considere uma superfície aberta, de qualquer formato.

Considere também essa superfície dividida em pequenos pedaços, áreas infinitesimais dA. Um vetor $\mathbf{n}$ seria um vetor normal a um pedaço infinitesimal dessa superfície. Consequentemente, qualquer elemento

$$d\mathbf{A} = dA\mathbf{n}$$

pode ser considerado um vetor normal à superfície, com amplitude proporcional ao tamanho de área escolhido.

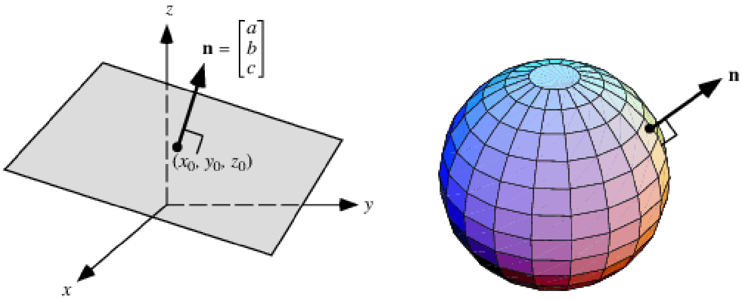

Figura 1 - Exemplo mostrando um vetor normal a um plano e um vetor normal a uma superfície fechada [2].

O fluxo elétrico é definido como um valor escalar (um número) que corresponde às linhas de campo elétrico que atravessam a superfície na mesma direção de $\mathrm{d}\mathbf{A}$. Ou seja, o fluxo elétrico é uma medida do quão perpendicular o campo elétrico é em relação à essa superfície. Um elemento infinitesimal de fluxo elétrico seria:

$$\mathrm{d}\phi_{\mathrm{E}} = \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = |\mathrm{E}|\mathrm{dA}\cos(\theta_{\mathrm{AE}})$$

em que θ_{AE} é o ângulo de incidência do campo elétrico nessa superfície (0° é perpendicular à superfície, ou paralelo a $\mathrm{d}\mathbf{A}$, 90° é paralelo à superfície, ou perpendicular à $\mathrm{d}\mathbf{A}$).

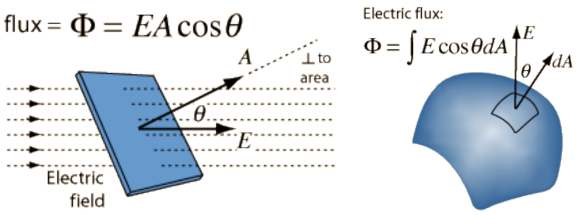

Figura 2 - Fluxo elétrico: intensidade de campo elétrico na direção perpendicular à superfície considerada [3].

Podemos fazer uma analogia do fluxo elétrico com um fluxo de ar passando por uma superfície aberta (seja um círculo aberto ou um “saco de plástico” aberto). O fluxo total de ar passando por essa superfície é o somatório da contribuição dos vetores de campo elétrico perpendiculares aos elementos infinitesimais de superfície com área dA**,**

$$\phi_E = \sum_i \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}$$

Esse raciocínio vale também para uma superfície fechada, o que se traduz em uma integral de superfície

$$\phi_{\mathrm{E}} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \qquad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\mathrm{m}^2\right] \equiv [\mathrm{V.m}]$$

Exemplo: fluxo elétrico de uma carga puntiforme no centro de uma esfera.

Em casos de simetria do campo elétrico através de uma superfície fechada, por exemplo, uma esfera centralizada em uma carga elétrica puntiforme Q, na qual as linhas de campo elétrico são radiais à carga e consequentemente perpendiculares a qualquer parte da superfície da esfera, a integração resultará em

$$\phi_E = |E|_{\perp} A_S$$

em que $|E|_{\perp}$ é a intensidade de campo elétrico perpendicular à superfície e A_S é área total da superfície.

No caso de uma carga puntiforme, sabemos que o campo elétrico em qualquer ponto a uma distância R dessa carga é dado por um vetor radial $\mathbf{E} = k\frac{Q}{R^2}\mathbf{a}_r$.

Para o caso de uma esfera de raio R com uma carga Q localizada em seu centro, o fluxo elétrico é

$$\phi_E = \left(k\frac{Q}{R^2}\right)(4\pi R^2)$$

$$\phi_E = k4\pi Q$$

e sendo $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ temos

$$\phi_E = \frac{Q}{\varepsilon}$$

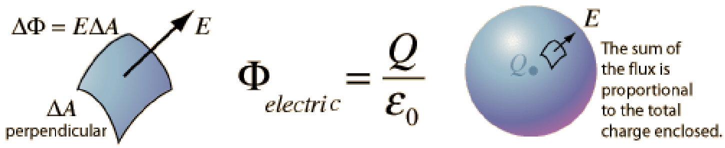

Figura 3 - Ilustração da Lei de Gauss [4].

Ou seja, o fluxo elétrico através da superfície depende apenas da carga total contida dentro dessa superfície dividida pela permissividade do meio.

A equação acima corresponde à **lei de Gauss para a eletrostática**: "*o fluxo total através de qualquer superfície fechada inversamente proporcional à permissividade do meio e diretamente proporcional à quantidade de carga elétrica contida nessa superfície*".

Lei de Gauss na forma pontual

Podemos também escrever a carga total contida dentro de uma superfície fazendo

$$Q = \varepsilon \phi_E$$

É possível ainda escrever essa equação em função da densidade volumétrica de carga, ou seja, o total de carga contido dentro da superfície fechada dividido pelo volume total que essa superfície envolve. Seja esse volume da superfície fechada dado por Vol, então

$$\frac{Q}{\mathrm{Vol}} = \rho_v = \varepsilon \frac{\phi_E}{\mathrm{Vol}}$$

Analisando em termos de suas unidades, pela definição de fluxo elétrico, ϕ_E é dado por $\frac{N}{C}m^2$. Portanto, a equação anterior pode ser vista em termo de suas unidades dada por

$$\frac{\rho_v}{\varepsilon} = \frac{\phi_E}{\mathrm{Vol}} \qquad \frac{\left[\frac{N}{C}m^2\right]}{m^3} \equiv \frac{N/C}{m}$$

De fato a unidade $\frac{N/C}{m}$ tem relação com a derivada do campo elétrico no espaço, o que irá nos permitir escrever a densidade de carga elétrica dentro de uma superfície fechada em função da derivada do campo elétrico dentro dessa superfície.

Essa intuição de fluxo por volume é explicada aplicando o teorema da divergência para transformar a lei de Gauss da forma integral para a forma diferencial quando o volume considerado for muito pequeno. O resultado da aplicação desse teorema é

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

em que produto escalar do vetor de derivadas $\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$ com outro vetor (no caso o campo elétrico) é conhecido como o **divergente** do campo elétrico.

O valor obtido pelo divergente indica uma fonte ou um dreno (ralo) de vetores. Ou seja, é o fluxo líquido de vetores entrando ou saindo de um ponto. Assim, tem-se a forma pontual (ou diferencial) da Lei de Gauss para a Eletrostática.

Quando o divergente é um valor positivo $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} > 0)$, isso indica que o ponto considerado é uma fonte de vetores (ou seja, há mais vetores saindo do ponto do que entrando) e isso caracteriza uma concentração de cargas positivas.

Quando o divergente é um valor negativo $(\nabla \cdot \mathbf{E} < 0)$, isso indica que o ponto considerado é um dreno de vetores (ou seja, há mais vetores entrando no ponto do que saindo) e isso caracteriza uma concentração de cargas negativas.

Quando o divergente é nulo $(\nabla \cdot \mathbf{E} = 0)$, isso indica que não há concentração de cargas no ponto considerado.

A lei de Gauss para a eletrostática é a primeira das quatro populares equações de Maxwell do Eletromagnetismo.

Referências:

[1] http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-02-electricity-and-magnetism-spring-2002/video-lectures/lecture-3-electric-flux-and-gausss-law/

[2] http://mathworld.wolfram.com/NormalVector.html

[3] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/gaulaw.html#c3

[4] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/gaulaw.html