Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Instituto Federal de Santa Catarina

Campus São José

Área de Telecomunicações

ELM20704 – Eletromagnetismo

Professor: Bruno Fontana da Silva

2014-2

Eletrostática:

Capacitância e Dielétricos

Lembrando da lei de Coulomb, do campo elétrico e do potencial elétrico para cargas puntiformes:

$$\mathbf{F} = k\frac{Q_1Q_2}{R^2}\mathbf{a}_r \qquad [\mathrm{N}]$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = k\frac{Q}{R^2}\mathbf{a}_r \qquad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] \equiv \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$V = \frac{U}{q} = \frac{\mathbf{F}\cdot R\mathbf{a}_r}{q} = \mathbf{E}\cdot R\mathbf{a}_R = k\frac{Q}{R} \qquad \left[\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}\right] \equiv \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right] \equiv [\mathrm{V}]$$

Nas equações acima, a constante k vale:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0},$$

e considerando as cargas no vácuo ($\varepsilon_r = 1$), esse valor é aproximadamente

$$k = 9 \times 10^9 \quad \left[\frac{\mathrm{N/C}}{\mathrm{C/m^2}}\right].$$

Para deslocar elétricas, realiza-se trabalho. A energia gasta para realizar este trabalho é a energia potencial elétrica. Essa energia tem relação direta com a diferença de potencial elétrico entre o estado final e o inicial do sistema.

Podemos avaliar essa energia em função do campo elétrico. Suponha que temos duas placas paralelas com área de superfície A, as quais estão carregadas com cargas elétricas Q e $-Q$, respectivamente. A densidade superficial de carga é dada por $\sigma = Q/A$, ou seja, $+Q = \sigma A$ e $-Q = -\sigma A$. Assuma também que há uma distância d separando as duas placas.

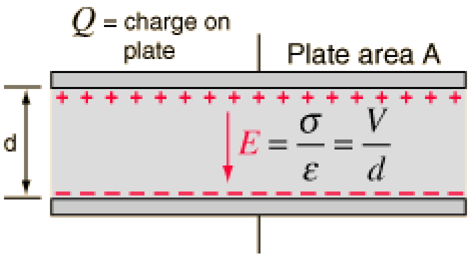

Figura 1 - Placas condutoras paralelas, de área A, separadas por uma distância d, carregadas com carga Q e -Q [2].

O campo elétrico gerado por duas placas paralelas de tamanho “infinito” (muito grande em relação à distância que às separa) é aproximadamente constante, e vale $|\mathrm{E}| = \sigma/\varepsilon$, com direção apontando das cargas positivas (placa carreada com $+Q$) para as negativas (placa carreada com $+Q$).

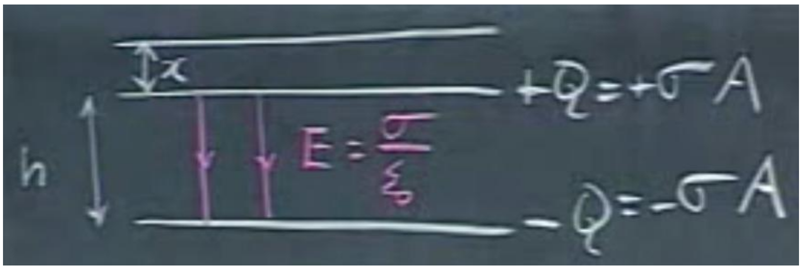

Figura 2 - Hipótese de deslocamento de uma placa por x unidades [3].

Suponha que deslocamos a placa superior por uma distância x, afastando-a da placa inferior. Ao mesmo tempo, um campo elétrico que não existia na região $\mathrm{d} + \mathrm{x}$ é “criado”. A intensidade do campo elétrico continuará a mesma, pois a quantidade de cargas em cada placa não mudou. Entretanto, para que esse campo elétrico em uma nova região seja gerado, é necessário realizar trabalho.

O trabalho realizado para mover essa placa é o produto da força necessária para mover a placa com densidade de carga σ através da distância x:

$$\mathrm{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

E qual é a força necessária para mover essa placa?

A força necessária para mover esta placa é a força necessária para vencer a ação do campo elétrico atuando sobre a camada de carga elétrica $+Q$ na região do dielétrico. Essa força é dada por $\mathbf{F}_{\mathbf{E}_\varepsilon} = \mathrm{Q}\mathbf{E}_\varepsilon = \mathrm{Q}\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{a}_\mathrm{E}$.

Porém, fora da placa, na região por onde a placa será movida, não há campo elétrico, inicialmente. Nessa região a força resistente ao movimento é nula ($\mathbf{F}_{\mathbf{E}_{\mathrm{out}}} = \mathrm{Q}\mathbf{E}_{\mathrm{out}} = 0$).

Portanto, temos de considerar a força média resistente a esse movimento. Essa força média é deve considerar o campo elétrico médio. Assumindo que os campos dentro e fora do dielétrico que separa as placas, são constantes, o campo médio é apenas

$$\mathbf{E}_{\mathrm{m}} = \frac{\mathbf{E}_{\varepsilon} + \mathbf{E}_{\mathrm{out}}}{2} = \frac{\mathbf{E}_{\varepsilon}}{2}$$

resultando em uma força média

$$\mathbf{F}_{\mathbf{E}_{\mathrm{m}}} = \frac{1}{2}\mathrm{Q}\mathbf{E}_{\varepsilon}$$

Logo, o trabalho realizado para mover essa placa através da distância x é igual a

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\mathrm{Q}\mathbf{E}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{x}$$

Considerando o trabalho realizado por um agente externo (movimento na direção contrária do campo elétrico) e substituindo $\mathrm{Q} = \sigma\mathrm{A}$ resulta

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\sigma\mathrm{A}|\mathbf{E}_{\varepsilon}|\mathrm{x} \underbrace{\rightarrow}_{\times\frac{\varepsilon}{\varepsilon}} \mathrm{W} = \frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{E}_{\varepsilon}|^2 \underbrace{\mathrm{Ax}}_{\mathrm{vol}}$$

Veja que Ax representa o "volume de campo elétrico" criado durante o deslocamento. Se normalizarmos o trabalho realizado por unidade de volume, teremos

$$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{vol}} = \frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{E}_{\varepsilon}|^2 \qquad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

Essa quantidade é conhecida como **densidade** (volumétrica) **de energia de campo.**

É possível mostrar que essa relação de densidade de energia de campo é valida para qualquer arranjo de cargas e não apenas para o arranjo de placas apresentado anteriormente. Isso nos traz uma nova maneira de calcular o trabalho realizado para deslocar cargas em função do campo elétrico existente e do novo "volume" de campo elétrico adicionado (ou removido) da configuração.

Assim, a energia do estado de uma configuração de cargas pode ser calculada através de uma integração volumétrica

$$\mathrm{W}_{\mathrm{T}} = \int_{\substack{\mathrm{todo} \\ \mathrm{espaço}}} \frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{E}_{\varepsilon}|^2 \mathrm{dV}$$

No caso das placas paralelas, antes do deslocamento de x unidades, a energia inicial era de

$$W_1 = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2 \mathrm{Ad} = \frac{1}{2}\underbrace{\sigma A}_{Q}\underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon}d}_{\mathrm{E.d}=\Delta \mathrm{V}}$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Q}\Delta\mathrm{V}$$

em que $\Delta\mathrm{V}$ é a diferença de potencial entre as duas placas. Ou seja, a energia do estado inicial é igual a metade da quantidade total de carga armazenada nas placas vezes a diferença de potencial entre as duas placas.

Capacitância

O termo capacitância refere-se à carga armazenada em um objeto dividida pelo potencial elétrico desse objeto

$$\text{capacitância} = \frac{\text{carga}}{\text{potencial}} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}} \qquad \left[\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volts}} \triangleq \text{Farads (F)}\right]$$

Por exemplo, a capacitância de uma esfera condutora de raio R cuja superfície está carregada com uma carga $+\mathrm{Q}$ uniformemente distribuída em sua superfície é dada por

$$C = \frac{Q}{\frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon\mathrm{R}}} = 4\pi\varepsilon\mathrm{R}$$

Alguns valores calculados de capacitância esférica, assumindo a permissividade elétrica do vácuo $\left(\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\right)$ são mostrados na tabela a seguir para diferentes valores de raio R:

R	C	
9×10^9 m	1 F	Big!
6400 km	~700 μF	Earth
~0.3 m	~30 pF	Van de Graaff
1 cm	~1 pF	

$$C = 4\pi\epsilon_o R = \frac{R}{9\times10^9}\ \text{Farad}$$

Figura 3 – Valores de capacitância de um objeto esférico para diferentes raios [5]

Essa tabela traz uma intuição do tamanho de objetos comparado com suas capacitâncias naturais (neste caso, assumindo formato esférico). Nota-se que a unidade de $1\ \mathrm{Farad}$ corresponde a uma capacitância muito grande, visto que a dimensão de um objeto com essa capacitância estaria na faixa de um raio 9 de milhões de quilômetros.

Se colocarmos todas as esferas no mesmo potencial elétrico, a esfera com maior raio (maior capacitância) terá a maior quantidade de cargas. Isso mostra que o valor de capacitância está relacionado com a capacidade de armazenar cargas elétricas.

Suponha uma esfera B carregada positivamente próxima a uma esfera A carregada negativamente. O potencial em B é influenciado pela presença do potencial em A.

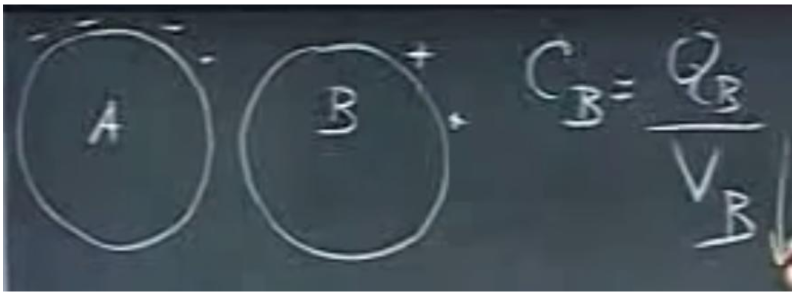

Figura 4 - Duas esferas carregadas: o potencial elétrico de uma esfera é afetado pela presença da outra, alterando sua capacitância [3].

Se a esfera A não estivesse próxima de B (ou não existisse), o potencial de B seria relacionado apenas com a presença das cargas positivas em B. Entretanto, com as duas esferas próximas, o potencial de B é reduzido pela presença das cargas negativas em A. Logo, a capacitância de B, de acordo com a definição anterior, ficaria alterada.

Uma forma mais justa de considerar essa capacitância da esfera B seria definido-a como a capacitância da esfera B na presença da esfera A.

Uma melhor definição seria imaginarmos dois condutores carregados com a mesma quantidade de carga Q, mas com diferentes polaridades (+Q e -Q). Então definimos a capacitância do sistema formado por esses dois condutores como a carga em um deles dividido pela diferença de potencial entre os condutores:

$$\text{capacitância} = \frac{\text{carga em uma placa condutora}}{\text{diferença de potencial entre as placas}}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad \left[\frac{C}{V} \triangleq F\right]$$

Voltando a o exemplo das placas paralelas, a capacitância das placas paralelas é dada por

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon} d}$$

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

A capacitância das placas paralelas é diretamente proporcional à área das placas (quanto maior a área, maior a quantidade de cargas que se pode armazenar) e inversamente proporcional à distância que às separa (quanto mais perto as placas estiverem, maior o efeito de uma placa em reduzir o potencial da outra, causando uma relação inversa entre capacitância e distância).

Suponha que aplique-se uma tensão de 10mV sobre um capacitor de $1000\mu\text{F}$. Pela definição, a quantidade de carga armazenada no capacitor será de

$$Q = C\Delta V = 1000\mu F.\, 10mV = 10\mu C$$

valor que representa uma quantidade de carga bastante significativa.

Podemos reescrever a fórmula de energia potencial elétrica do sistema de placas paralelas em função da capacitância, sendo então

$$W = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

Além disso, o valor de capacitância é afetado pelo valor de ε, que representa a permissividade absoluta do material entre as duas placas (conhecido como dielétrico). Para entender como o valor do dielétrico afeta a capacitância, vejamos um pouco sobre dielétricos.

Dielétricos

Campos elétricos podem induzir dipolos em materiais isolantes. Elétrons em materiais isolantes estão normalmente fortemente "presos" às suas moléculas, diferente dos materiais condutores, em que são livres para se movimentar.

Ao aplicar um campo elétrico externo, os elétrons do material isolante se deslocam por uma região maior do que normalmente fariam, e durante um período maior de tempo, criando o efeito de um dipolo (neste caso, carga negativa fora do raio efetivo da molécula considerada carga positiva no centro).

O resultado dessa indução de cargas elétricas através de campo elétrico externo é conhecido como polarização. As substâncias que sofrem ação dessa indução são conhecidas como **materiais dielétricos**.

Suponha duas placas condutoras separadas por um material dielétrico. Ao aplicarmos uma diferença de potencial entre as placas, temos um campo elétrico externo sendo aplicado. A placa positiva irá induzir (atrair) o posicionamento dos elétrons no dielétrico, enquanto os elétrons da placa negativa irão induzir (atrair) cargas positivas na outra placa.

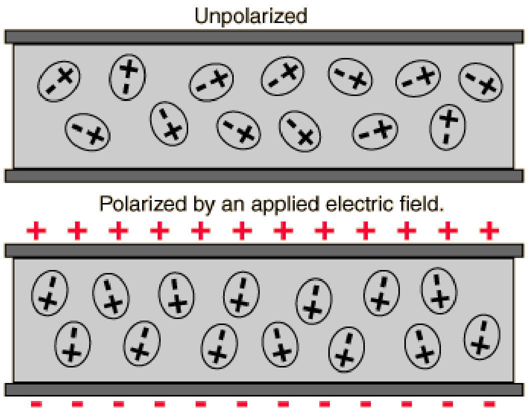

Figura 5 - comportamento das moléculas do dielétrico quando (a) não polarizado e (b) polarizado. No caso (b), o campo externo (em vermelho) polariza as moléculas; as moléculas polarizadas produzem um campo elétrico contrário que reduz a intensidade do campo externo. [3]

Temporariamente, o próprio dielétrico criará um campo elétrico contrário ao campo externo. O campo resultando é a diferença entre os dois. Para aumentar o valor do campo resultante, é necessário armazenar mais cargas nas placas do capacitor, fortalecendo o campo externo.

O campo elétrico resultante é uma fração do campo elétrico aplicado. No melhor caso (vácuo), o campo elétrico resultante é exatamente igual ao campo elétrico aplicado. Isso é expresso pela seguinte equação:

$$\mathrm{E_{resultante}} = \frac{\mathrm{E_{aplicado}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$$

A constante ε_{r} é chamada permissividade relativa. Gases possuem uma permissividade relativa muito próxima de um. O nome permissividade relativa vem do fato de o valor de ε_r corresponder a uma razão entre a permissividade absoluta do material considerado e a permissividade do vácuo, ou seja,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

em que **a permissividade relativa é definida no intervalo $\varepsilon_r \geq 1$,** com igualdade somente quando o dielétrico considerado é o vácuo.

Ou seja, **o menor valor de permissividade absoluta é a permissividade do vácuo**. Qualquer outro material oferece uma “resistência” maior à passagem do campo elétrico. Portanto, concluímos que materiais que são isolantes de campo elétrico possuem uma permissividade relativa alta.

A tabela a seguir apresenta os valores de permissividade relativa para diferentes materiais.

Tabela 1 - Valores de permissividade relativa [1]

Material	ε_r
Vácuo (definição)	1
Ar	1,0005
Dióxido de carbono	1,001
Teflon	2,1
Polietileno	2,26
Borracha	2,5 até 3
Nylon	3,5
Quartzo	3,8
Vidro	4 até 7
Silica	4,2
Gelo	4,2 (altas frequências) ou 90 (DC)
Mica	5,4
Cloreto de Sódio	5,9
Procelana	6
Óxido de alumínio	8,8
Silício	11,8
Ferrite (NiZn)	12,4
Álcool etílico	25
Água (destilada)	80
Dióxido de titânio	100
Titanato de Bário	1200

Em relação às capacitâncias, concluímos então que quanto maior o valor da permissividade relativa do material dielétrico, maior o valor da capacitância resultante para uma geometria definida, ou seja, uma relação diretamente proporcional.

Referências:

[1] HAYT, W., BUCK,J. **Engineering Electromagnetics**, 2011.

[2] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/pplate.html#c1

[3] https://www.youtube.com/watch?v=7NUbsQt-G9U

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Permittivity

[5] http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-02-electricity-and-magnetism-spring-2002/lecture-notes/lecsup220.pdf