INSTITUTO
FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação 2

Filtros Digitais

Curso: Engenharia de Telecomunicações
Disciplina: PSD29007 - Processamento de Sinais Digitais
Professor: Elen Macedo Lobato

Alunos

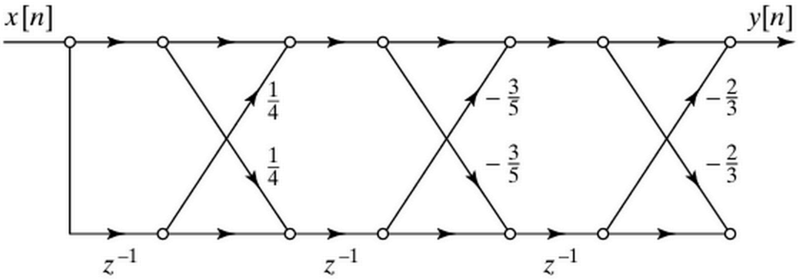
Filipi Virgilio
João Pedro Menegali Salvan Bitencourt
Yago Castro Rosa

01 de novembro de 2023

Sumário

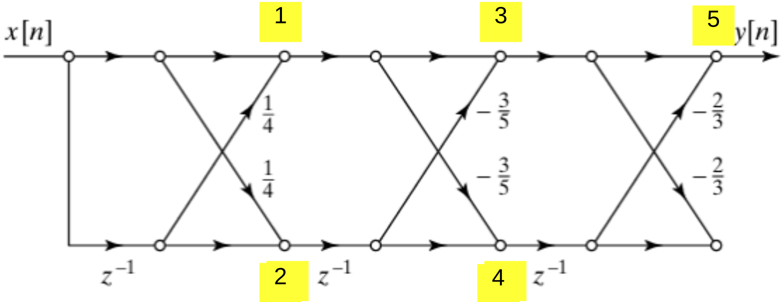
Questão 1

Considere o diagrama de fluxo de sinais a seguir.



a) Determine a função de transferência H[z] relacionando a entrada x[n] à saída y[n] para o filtro FIR em treliça da figura acima.

- (Filipi Virgilio) Obtendo a função de transferência pelo diagrama de fluxo. Para tal, inicialmente, destaca-se os nós somadores:



Dessa forma, é possível obter:

1) x[n] + 0,25x[n-1]
2) x[n-1] + 0,25x[n]
3) x[n] + 0,25x[n-1] – 0,6x[n-2] - 0,15x[n-1]
4) x[n-2] + 0,25x[n-1] – 0,6x[n] – 0,15x[n-1]
5) y[n] = x[n] + 0,25x[n-1] – 0,6x[n-2] - 0,15x[n-1] - 0,67x[n-3] – 0,17x[n-2] + 0,4x[n-1] + 0,1x[n-2]

Com isso, a equação no domínio de n é:
y[n] = x[n] + 0,50x[n-1] – 0,67x[n-2] - 0,67x[n-3]

Passando para o domínio z:

$$Y[z] = X[z] + 0,5z^{-1}X[z] - 0,66z^{-2}X[z] - 0,666z^{-2}X[z]$$

$$Y[z] = X[z]\left(1 + 0,5z^{-1} - 0,66z^{-2} - 0,666z^{-2}\right)$$

Portanto, a função de transferência dá-se por:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = 1 + 0,5z^{-1} - 0,66z^{-2} - 0,666z^{-2}$$

$$H[z] = 1 + 0,5z^{-1} - 0,66z^{-2} - 0,666z^{-2}$$

- (João Pedro Menegali Salvan Bitencourt) Obtendo os coeficientes α utilizando o algorítmo para conversão de parâmetros k em coeficientes:

Dados:

$$k_1 = -\frac{1}{4}, k_2 = \frac{3}{5}, k_3 = \frac{2}{3}$$

Para i = 1, 2 e 3.

i = 1

$$\alpha_1^{(1)} = -\frac{1}{4}$$

i = 2

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{3}{5}$$

Se i > 1, então para j = 1;

Para j = 1

$$\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-j}^{(i-1)} \quad \rightarrow \quad \alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(2-1)} - k_2 \alpha_{2-1}^{(2-1)} \quad \rightarrow \quad \alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(1)} - \frac{3}{5}\alpha_1^{(1)}$$

Fim

i = 3

$$\alpha_3^{(3)} = \frac{2}{3}$$

Se i > 1, então para j = 1, 2;

Para j = 1

$$\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-j}^{(i-1)} \quad \rightarrow \quad \alpha_1^{(3)} = \alpha_1^{(3-1)} - k_3 \alpha_{3-1}^{(3-1)} \quad \rightarrow \quad \alpha_1^{(3)} = \alpha_1^{(2)} - \frac{2}{3}\alpha_2^{(2)}$$

Para j = 2

$$\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-j}^{(i-1)} \quad \rightarrow \quad \alpha_2^{(3)} = \alpha_2^{(3-1)} - k_3 \alpha_{3-2}^{(3-1)} \quad \rightarrow \quad \alpha_2^{(3)} = \alpha_2^{(2)} - \frac{2}{3}\alpha_1^{(2)}$$

Fim

Fim

$$\alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(1)} - \frac{3}{5}\alpha_1^{(1)}$$

Para encontrar $\alpha_1^{(3)}$, substitui-se $\alpha_1^{(2)}$ em $\alpha_1^{(3)} = \alpha_1^{(2)} - \frac{2}{3}\alpha_2^{(2)}$:

$$\alpha_1^{(3)} = \alpha_1^{(2)} - \frac{2}{3}\alpha_2^{(2)}$$

$$\alpha_1^{(3)} = \alpha_1^{(1)} - \frac{3}{5}\alpha_1^{(1)} - \frac{2}{3}\alpha_2^{(2)}$$

$$\alpha_1^{(3)} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha_1^{(3)} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{20} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Para encontrar $\alpha_2^{(3)}$, substitui-se $\alpha_1^{(2)}$ em $\alpha_2^{(3)} = \alpha_2^{(2)} - \frac{2}{3}\alpha_1^{(2)}$:

$$\alpha_2^{(3)} = \alpha_2^{(2)} - \frac{2}{3}\alpha_1^{(2)}$$

$$\alpha_2^{(3)} = \alpha_2^{(2)} - \frac{2}{3}\left(\alpha_1^{(1)} - \frac{3}{5}\alpha_1^{(1)}\right)$$

$$\alpha_2^{(3)} = \alpha_2^{(2)} - \frac{2}{3}\alpha_1^{(1)} + \frac{2}{5}\alpha_1^{(1)}$$

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{3}{5} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{3}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{2}{3} = 0,6667$$

Conforme obtido anteriormente:

$$\alpha_3^{(3)} = \frac{2}{3} = 0,6667$$

Portanto:
$\alpha_1^{(3)} = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2^{(3)} = \frac{2}{3}$ e $\alpha_3^{(3)} = \frac{2}{3}$
ou
$\alpha_1^{(3)} = -0,5$, $\alpha_2^{(3)} = 0,6667$ e $\alpha_3^{(3)} = 0,6667$

Equação no tempo:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{2}{3}x[n-2] - \frac{2}{3}x[n-3]$$

Realizando a transformada Z:

$$Y[z] = X[z] + \frac{1}{2}z^{-1}X(z) - \frac{2}{3}z^{-2}X(z) - \frac{2}{3}z^{-3}X(z)$$

$$Y(z) = X(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}\right)$$

Portanto, a equação de transferência é:

$$\boxed{A(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}}$$

- (Yago Castro Rosa) Obtendo a função de transferência utilizando as equações recursivas:

  Sejam os coeficientes:

  - $k_1 = -0{,}25$
  - $k_2 = 0{,}6$
  - $k_3 = 0{,}67$:

  E sejam as funções do método recursivo:

  - $A^{(0)}(z) = B^{(0)}(z) = 1$
  - $A^{(i)}(z) = A^{(i-1)}(z) - k_i * z^{-1}B^{(i-1)}(z)$
  - $B^{(i)}(z) = -k_i * A^{(i-1)}(z) + z^{-1}B^{i-1}(z)$

  Para i = 1:

  - $A^{(1)}(z) = A^{(0)}(z) - k_1 * z^{-1}B^{(0)}(z) = 1 + 0,25 * z^{-1} * 1 = 1 + 0,25z^{-1}$
    $A^{(1)}(z) = 1 + 0,25z^{-1}$
  - $B^{(1)}(z) = -k_1 * A^{(0)}(z) + z^{-1}B^{(0)} = -(-0,25) * 1 + z^{-1} * 1 = 0,25 + z^{-1}$
    $B^{(1)}(z) = 0,25 + z^{-1}$

  Para i = 2:

  - $A^{(2)}(z) = A^{(1)}(z) - k_2 * z^{-1}B^{(1)}(z) = 1 + 0,25 * z^{-1} - 0,6 * z^{-1} * \left(0,25 + z^{-1}\right)$
    $A^{(2)}(z) = 1 + 0,25z^{-1} - 0,15z^{-1} - 0,6z^{-2} = 1 + 0,1z^{-1} - 0,6z^{-2}$
    $A^{(2)}(z) = 1 + 0,1z^{-1} - 0,6z^{-2}$
  - $B^{(2)}(z) = -k_2 * A^{(1)}(z) + z^{-1}B^{(1)}(z) = -0,6 * \left(1 + 0,25 * z^{-1}\right) + z^{-1} * \left(0,25 + z^{-1}\right)$
    $B^{(2)}(z) = -0,6 - 0,15z^{-1} + 0,25z^{-1} + z^{-2}$
    $B^{(2)}(z) = -0,6 + 0,1z^{-1} + z^{-2}$

  Para i = 3:

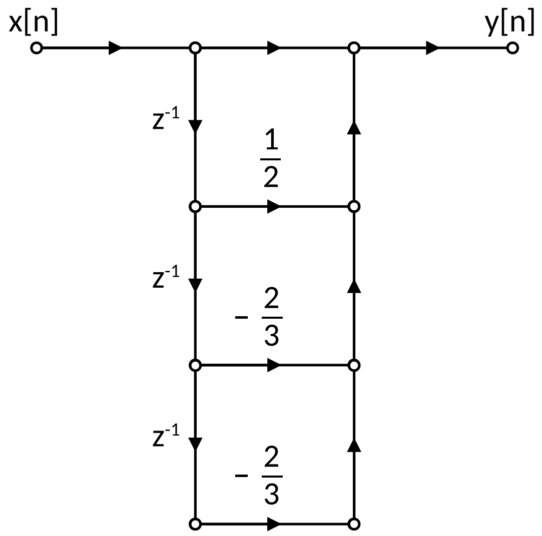
  - $A^{(3)}(z) = A^{(2)}(z) - k_3 * z^{-1}B^{(2)}(z) = 1 + 0,1z^{-1} - 0,6z^{-2} - 0,67z^{-1}\left(-0,6 + 0,1z^{-1} + z^{-2}\right)$
    $A^{(3)}(z) = 1 + 0,1z^{-1} - 0,6z^{-2} + 0,402z^{-1} - 0,067z^{-2} - 0,67z^{-3}$
    $A^{(3)}(z) = 1 + 0,5z^{-1} - 0,667z^{-2} - 0,67z^{-3}$

  Dessa forma:
  $A^{(3)}(z) = A[z] = H[z] = 1 + 0,5z^{-1} - 0,667z^{-2} - 0,67z^{-3}$

  Portanto, a função de transferência é:

  $H[z] = 1 + 0,5z^{-1} - 0,667z^{-2} - 0,67z^{-3}$

b) Desenhe o diagrama de fluxo de sinais na forma direta I.

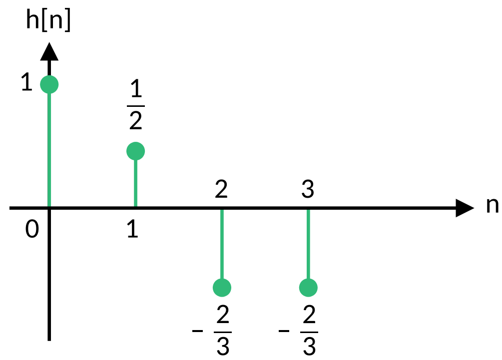


c) Determine e trace o gráfico da resposta ao impulso unitário.

Conforme obtido anteriormente:

$$H[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{2}{3}\delta[n-2] - \frac{2}{3}\delta[n-3]$$

Portanto, o gráfico da resposta ao impulso unitário é dado abaixo:

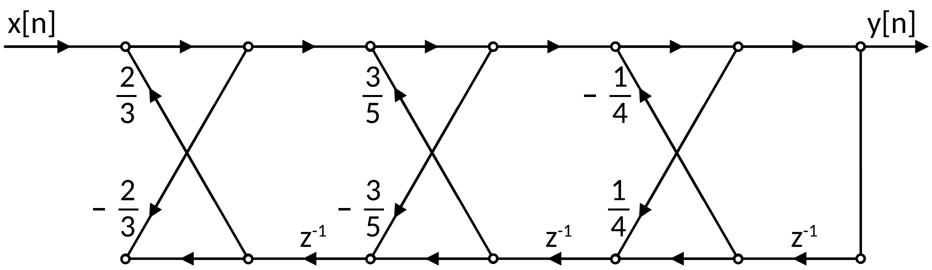


d) Desenhe a estrutura do filtro em treliça para o filtro só-pólos $H(z) = \frac{1}{A[z]}$.

Sendo $H(z) = \frac{1}{A[z]}$ e $A(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}$, faz-se:

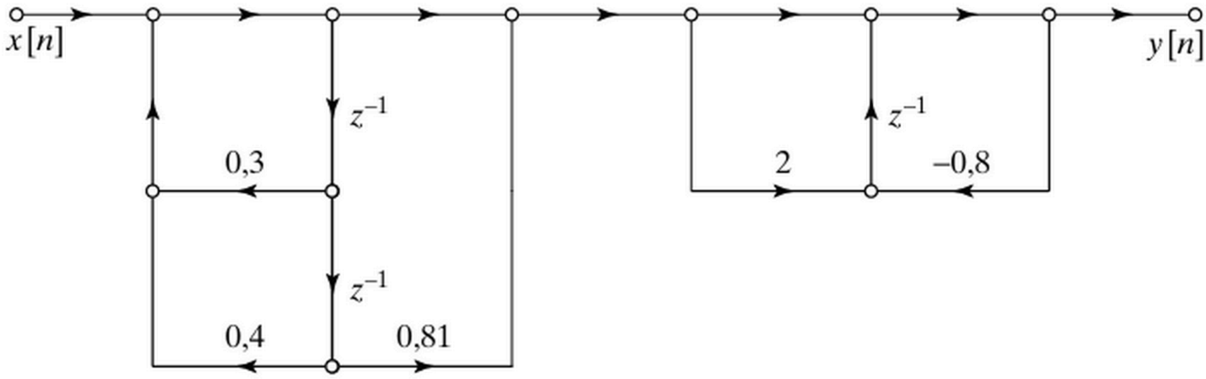
$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}}$$

A estrutura fica da seguinte forma:



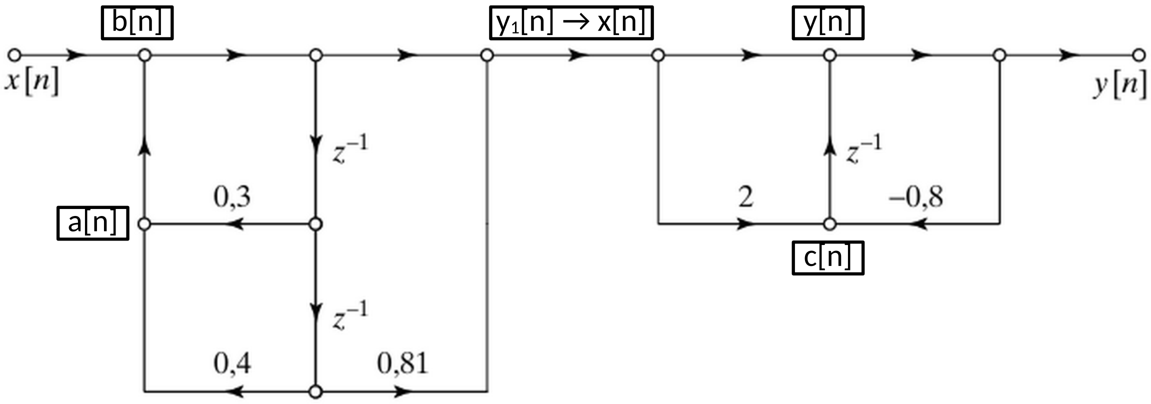
Questão 2

Um sistema LIT causal é definido pelo diagrama de fluxo de sinais mostrado na Figura a seguir, que representa o sistema como uma cascata de um sistema de segunda ordem com um sistema de primeira ordem.



a) Qual é a função de transferência do sistema em cascata global?

Primeiramente, destaca-se os nós somadores:



É possível dividir esse sistema em duas partes, sendo a primeira parte composta por y_1 [n]:

$a[n] = 0,3b[n-1] + 0,4b[n-2]$

$b[n] = x[n] + a[n]$

$b[n] = x[n] + 0,3b[n-1] + 0,4b[n-2]$

Passando b[n] para o domínio z:

$B[z] = X[z] + 0,3z^{-1}B[z] + 0,4z^{-2}B[z]$

$X[z] = B[z]\left(1 - 0,3z^{-1} - 0,4z^{-2}\right)$

Encontrando y_1 [n]:

$y_1[n] = b[n] + 0,81b[n-2]$

Passando y_1 [n] para o domínio z:

$Y_1[z] = B[z] + 0,81z^{-2}B[z]$

$Y_1[z] = B[z]\left(1 + 0,81z^{-2}\right)$

Portanto a função de transferência $H_1[z]$ da primeira parte corresponde à:

$$H_1[z] = \frac{Y_1[z]}{X[z]} = \frac{B[z]\left(1 + 0,81z^{-2}\right)}{B[z](1 - 0,3z^{-1} - 0,4z^{-2})}$$

$$\boxed{H_1[z] = \frac{1 + 0,81z^{-2}}{1 - 0,3z^{-1} - 0,4z^{-2}}}$$

Na segunda parte temos:
c[n] = 2x[n] - 0,8y[n]
y[n] = x[n] + c[n-1]
y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 0,8y[n-1]
y[n] + 0,8y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]

Passando y[n] para o domínio z:
$Y[z] + 0,8z^{-1}Y[z] = X[z] + 2z^{-1}X[z]$
$Y[z]\left(1 + 0,8z^{-1}\right) = X[z]\left(1 + 2z^{-1}\right)$

Portanto a função de transferência $H_2[z]$ da segunda parte corresponde à:

$$H_2[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,8z^{-1}}$$

$$\boxed{H_2[z] = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,8z^{-1}}}$$

Por fim, a função de transferência global dá-se pelo produto de $H_1[z]$ com $H_2[z]$:

$$H[z] = H_1[z].H_2[z]$$

$$H[z] = \frac{1 + 0,81z^{-2}}{(1 - 0,3z^{-1} - 0,4z^{-2})}.\frac{1 + 2z^{-1}}{(1 + 0,8z^{-1})}$$

Para encontrar o polinônimo resultante do produto dos dois polinômios $H_1[z]$ e $H_2[z]$, foi utilizado o código abaixo, realizado na linguagem MATLAB:

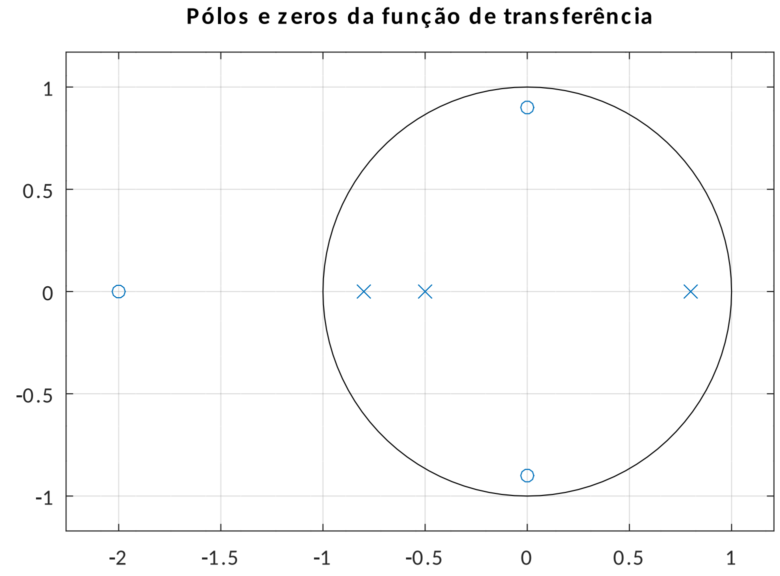
```
numerador1 = roots([1 0 0.81]);
denominador1 = roots([1 -0.3 -0.4]);
numerador2 = roots([1 2])
denominador2 = roots([1 0.8])
pol_numerador = poly([0+0.9000i 0-0.9000i -2])
pol_denominador = poly([0.8000 -0.5000 -0.8000])
zplane([pol_numerador],[pol_denominador]);
title('Pólos e zeros da função de transferência');
```

Com isso, pôde-se obter a seguinte função de transferência global:

$$\boxed{H[z] = \frac{1 + 2z^{-1} + 0,81z^{-2} + 1,62z^{-3}}{1 + 0,5z^{-1} - 0,64z^{-2} - 0,32z^{-3}}}$$

b) O sistema global é estável? Explique resumidamente.

Sim, pois de acordo com a função de transferência encontrada, todos os pólos encontram-se dentro do círculo de raio unitário, conforme mostrado na figura abaixo:



Fonte: Autoria própria.

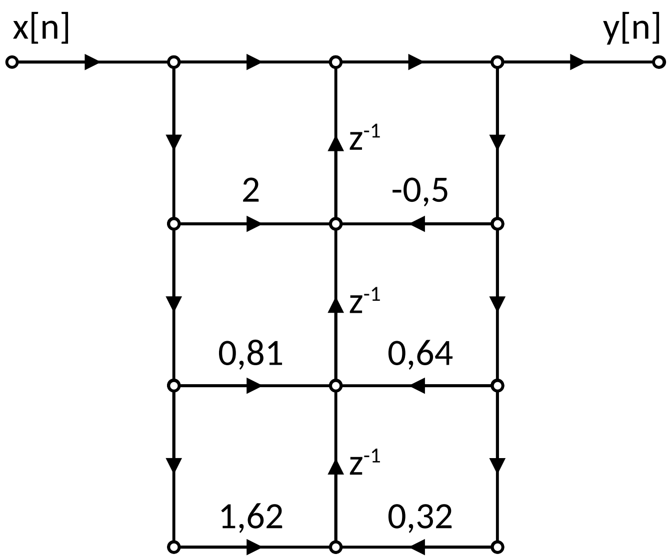
A figura acima foi gerada utilizando a função `zplane` do exercício anterior.

c) Desenhe o diagrama de fluxo de sinais de uma implementação na forma direta II transposta desse sistema.

Dada a função de transferência encontrada anteriormente:

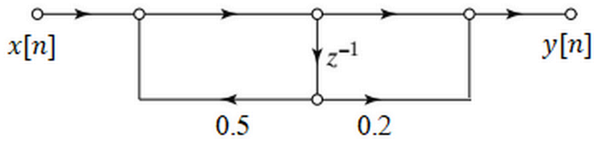
$$H[z] = \frac{1 + 2z^{-1} + 0,81z^{-2} + 1,62z^{-3}}{1 + 0,5z^{-1} - 0,64z^{-2} - 0,32z^{-3}}$$

é possível obter o seguinte diagrama de fluxo:



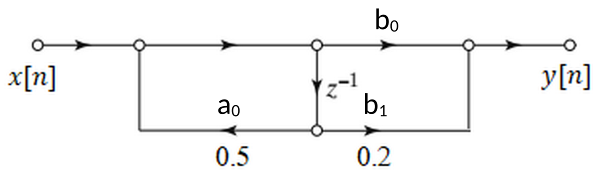
Questão 3

A figura a seguir mostra uma implementação em forma direta II de um sistema



a) Determine a função de transferência H[z].

É possível obter a função de transferência diretamente a partir dos índices a_1, b_0 e b_1, conforme destacados na imagem abaixo:

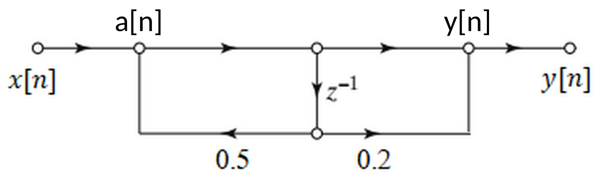


Seja:
$a_1 = 0{,}5$, $b_1 = 0{,}2$ e $b_0 = 1$

A função de transferência é dada por:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Alternativamente, é possível deduzir a função de transferência diretamente do diagrama de fluxo. Para tal, basta destacar os nós somadores:



Dessa forma, tem-se que a[n]:
a[n] = x[n] + 0,5a[n-1]
x[n] = a[n] - 0,5a[n-1]

Passando x[n] para o domínio z:
$X[z] = A[z] - 0,5z^{-1}A[z]$
$X[z] = A[z]\left(1 - 0,5z^{-1}\right)$

E para y[n] tem-se:
y[n] = a[n] + 0,2a[n-1]

Passando y[n] para o domínio z:
$Y[z] = A[z] + 0,2z^{-1}A[z]$
$Y[z] = A[z]\left(1 + 0,2z^{-1}\right)$

Portanto, a função de transferência é dada por:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{A[z]\left(1 + 0,2z^{-1}\right)}{A[z](1 - 0,5z^{-1})} = \frac{1 + 0,2z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

b) Determine a resposta ao impulso.

Dada a função de transferência encontrada no item anterior, a resposta ao impulso da entrada até o primeiro nó é:

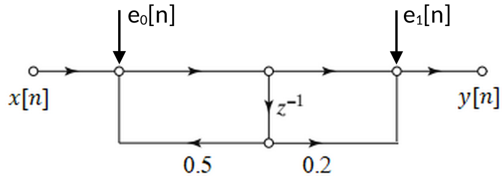
$h_1[n] = (0,5)^n u[n]$

A resposta ao impulso da entrada até o segundo nó utiliza a resposta ao impulso da entrada até o primero, e é dada por:

$h_2[n] = (0,5)^n u[n] + 0,2(0,5)^{n-1} u[n-1]$

c) Assumindo que o sistema seja implementado em aritmética de ponto fixo de 8 bits, e que todos os produtos sejam arredondados para 8 bits antes que uma soma qualquer tenha sido realizada. Usando o modelo linear para ruído de arredondamento, encontre a variância do ruído de arredondamento na saída do filtro.

Para o diagrama de fluxo dado, o modelo linear do ruído de arredondamento está mostrado abaixo:



Como a aritmética de ponto fixo é de 8 bits, tem-se que:
B + 1 = 8
B = 7

A variância dos ruídos $e_0[n]$ e $e_1[n]$ é σ_e^2, o qual:

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2.7}}{12} = \frac{2^{-14}}{12} = \frac{0,00006103515}{12} = 0,00000508626$$

A variância do ruído de saída para esse sistema é:

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 + \sigma_e^2\left(\frac{b_0^2 + b_1^2 + 2a_1b_0b_1}{1 - a_1^2}\right)$$

$$\sigma_f^2 = 0,00000508626 + 0,00000508626\left(\frac{1^2 + 0,2^2 + 2.(0,5).(1).(0,2)}{1 - 0,5^2}\right)$$

$$\sigma_f^2 = 0,00000508626 + 0,00000508626\left(\frac{1 + 0,04 + 0,2}{1 - 0,25}\right)$$

$$\sigma_f^2 = 0,00000508626 + 0,00000508626\left(\frac{1,24}{0,75}\right)$$

$$\sigma_f^2 = 0,00000508626 + 0,00000508626.1,653333333$$

$$\sigma_f^2 = 0,00000508626 + 0,00000840928$$

$$\sigma_f^2 = 0,00001349554$$