INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
Componente Curricular: Cálculo 4
Professor: João Carlos Bezz Batti
Aluno: João Pedro Menegali Salvan Bitencourt
Turma: 29004
Data: 25/11/2018

Cálculo Numérico

Cálculo dos zeros da função

Introdução

Encontrar o zero de uma função, é obter um ou mais valores que, quando substituídos na variáveis corretas, tornam a equação igual a zero. Através do métodos citados acima, funções cujas raízes são difíceis de calcular, podem ter o cálculo das mesmas agilizado, encontrando um valor que, ao ser substituído nas variáveis, iguale a função tão próximo à 0 quanto se queira.

Os métodos numéricos para encontrar a raiz de uma função agilizam e tornam mais eficiente esse processo em sistemas de equações mais complexas. Utilizando equipamento computacional, é possível resolver um problema que, feito manualmente, poderia demorar várias horas para ser concluído, além de poder conter erros no meio do processo. Além disso, é possível refinar o erro (precisão) e obter o novo resultado em poucos segundos.

Este documento explana o uso da planilha eletrônica, bem como todo o processo de iteração de cada método, detalhando cada passo e explicando como cada elemento da planilha foi feito. Será detalhado, também, alguns outros cálculos que fizeram parte do processo de alguns métodos, como derivadas e isolamento de variáveis. Explicar-se-á, ainda, as condições para que cada método funcione.

Os métodos abordados são: Método da Bisseção, Método do Ponto Fixo, Método da Posição Falsa, Método de Newton-Raphson e o Método das Secantes.

Informações iniciais

A função para a qual os métodos serão aplicados é:

$$f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1 \quad (1)$$

O intervalo para qual encontrar-se-á a raiz tem os extremos em -10 e 10, ou seja, no pior dos casos, este intervalo será usado. A precisão desejada é de 0,0001, ou seja, o valor para o qual a igualdade provocada pela raiz encontrada deva ser menor.

Em decorrência de a função possuir *ln(x)*, jamais haverá raiz negativa. A representação gráfica da função é dada abaixo:

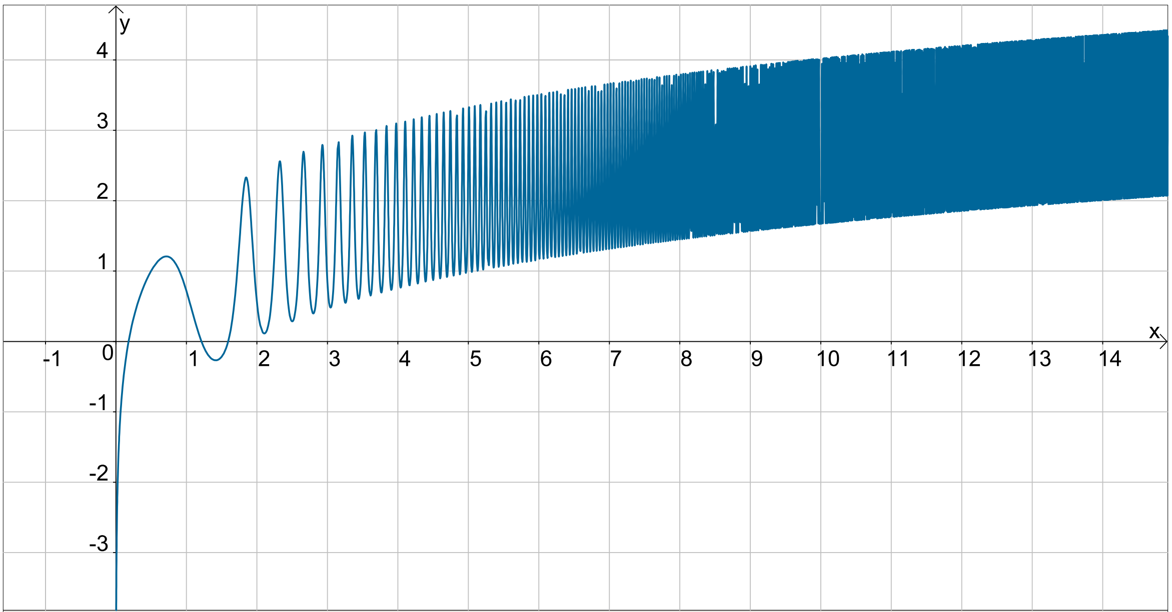

Figura 1 - Gráfico da função $f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1$

A função é contínua para todo x real maior do que zero, ou seja, nesta condição, a função não possui nenhum valor para o qual não esteja definida. Graficamente, significa dizer que não há interrupções ao longo de todo o gráfico até o infinito. A aparência da representação no plano cartesiano remete ao gráfico característico da função *ln(x)*, mostrado abaixo:

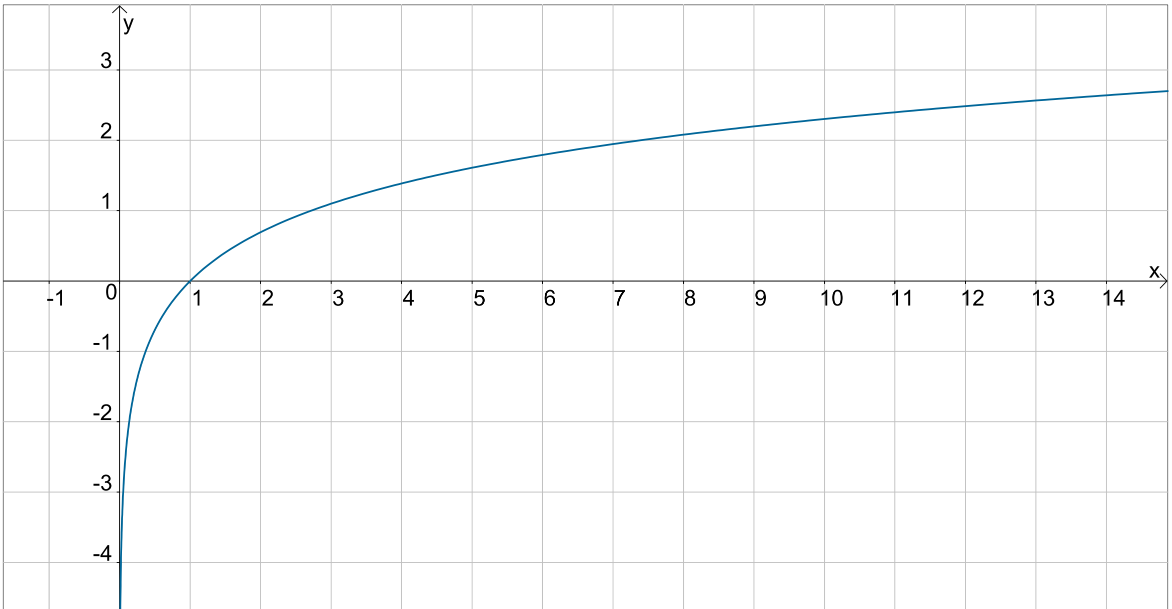

Figura 2 - Gráfico da função $f(x) = \ln(x)$

Intuitivamente, isso ocorre pela presença de *ln(x)* na função. Há, ainda, a presença de $e^{\cos(x^3)}$, que gera o seguinte gráfico:

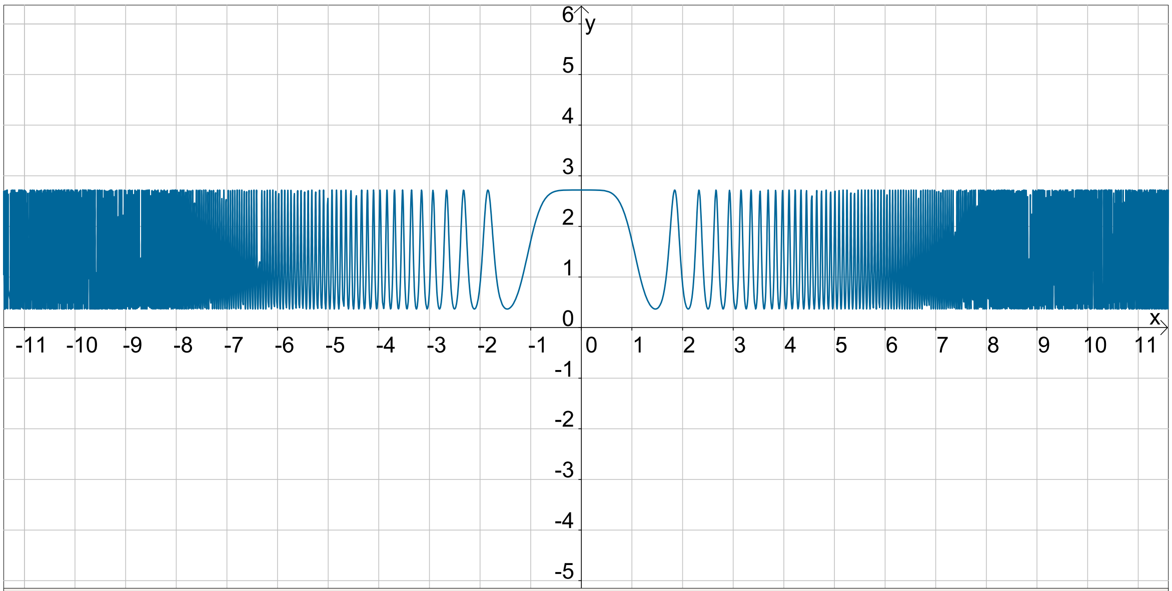

Figura 3 - Gráfico da função $f(x)=e^{\cos(x^3)}$

Devido à presença de $\cos(x^3)$ como potência da função *e* e os valores expressos pelo eixo *x* serem em radianos, o expoente da função *e* varia entre valores negativos e positivos, sendo que, quando o expoente de *e* assume valores negativos, a função começa a decrescer e ao assumir valores positivos, começa a crescer novamente. Este processo, repete-se indefinidamente.

A presença de *ln(x)*, remove a possibilidade de qualquer valor menor ou igual a zero em *x* e faz com que haja raízes reais. Veja o gráfico abaixo:

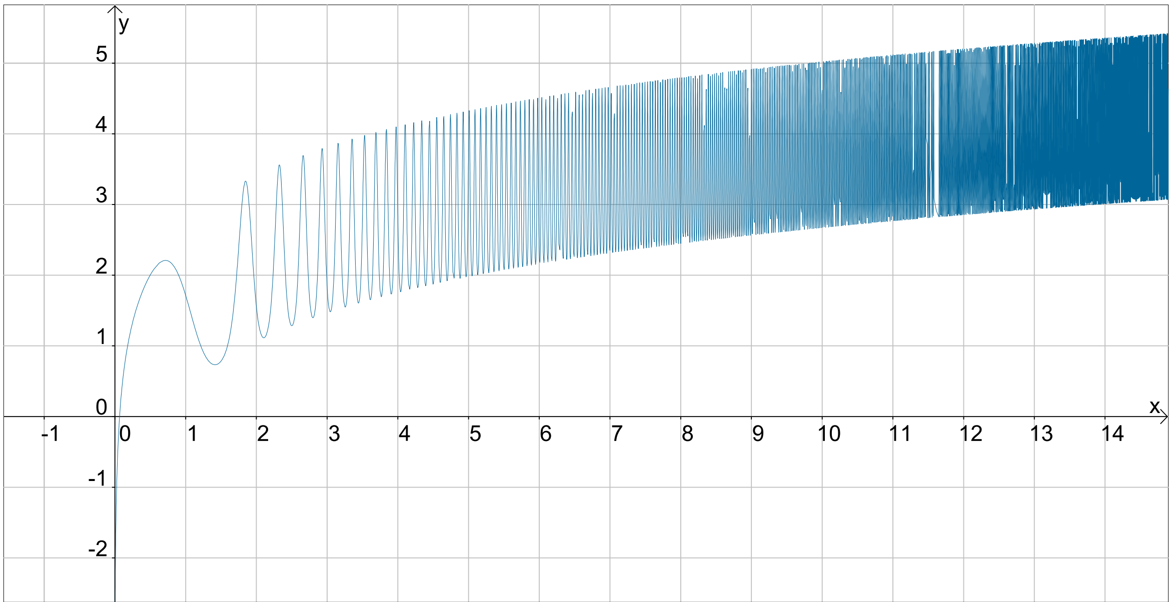

Figura 4 - Gráfico da função $f(x)=e^{\cos(x^3)}+\ln(x)$

Na Fig. 4, a função possui uma raiz real. Como a imagem de *ln(x)* assume valores negativos quando *x* se aproxima de zero, a função acima acaba cruzando o eixo das abcissas, já que esta imagem negativa de *ln(x)* é menor do que o menor valor assumido pela função da Fig. 3.

A Fig. 5 ilustra a comparação entre a função sem “-1” e a que inclui o “-1” como último termo. Este, desloca a função um nível para baixo, assim, se um ponto tocava em 2,76, por exemplo, passa a tocar em 1,76.

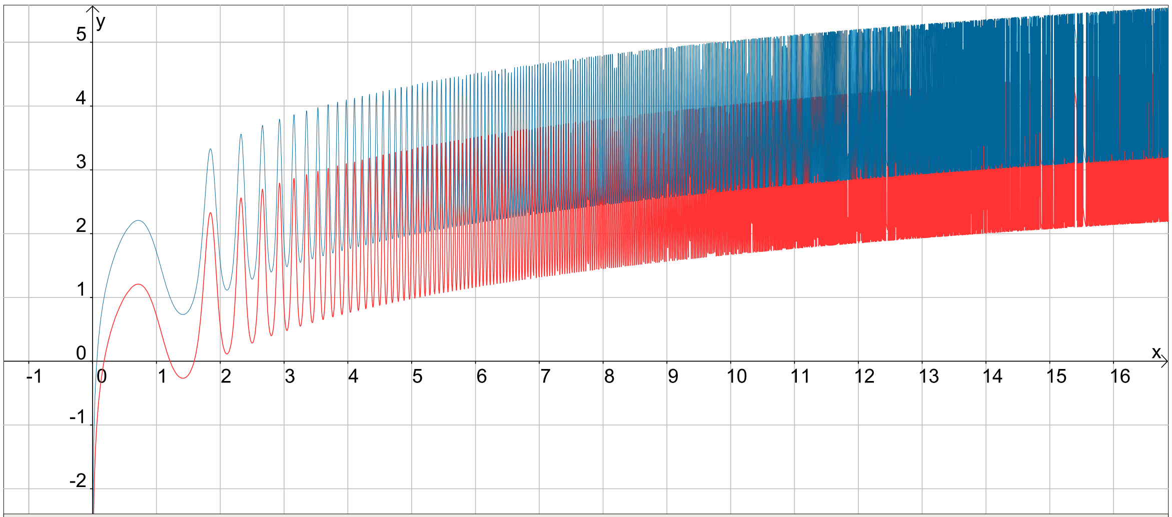

Figura 5 – Em vermelho, o gráfico da função $f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1$. Em azul, o gráfico da função $f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x)$.

Na Fig. 5, a função em vermelho possui mais de uma raiz real, o que pode facilitar na hora de escolher um intervalo para aplicar os métodos que encontram o valor mais próximo da raiz procurada.

Método da Bisseção

Este método exige que o intervalo entre um ponto mínimo *a* e um ponto máximo *b* seja contínuo, ou seja, a função necessita estar definida em todos os pontos dentro deste intervalo. Além disso, é necessário que f(*a*) · f(*b*) < 0, ou seja, se ao substituir os valores *a* e *b* na função e multiplicar os dois resultados obtidos, deve gerar um valor negativo. Assim, é garantido que há uma raiz no intervalo escolhido, ou seja, se f(*a*) < 0 e f(*b*) > 0, é garantido que haja uma raiz entre os pontos, já que 0 está entre o valor negativo e positivo, respectivamente. A Fig. 6 ilustra o gráfico da Função (1), com os pontos *a* e *b* marcados no eixo das abcissas.

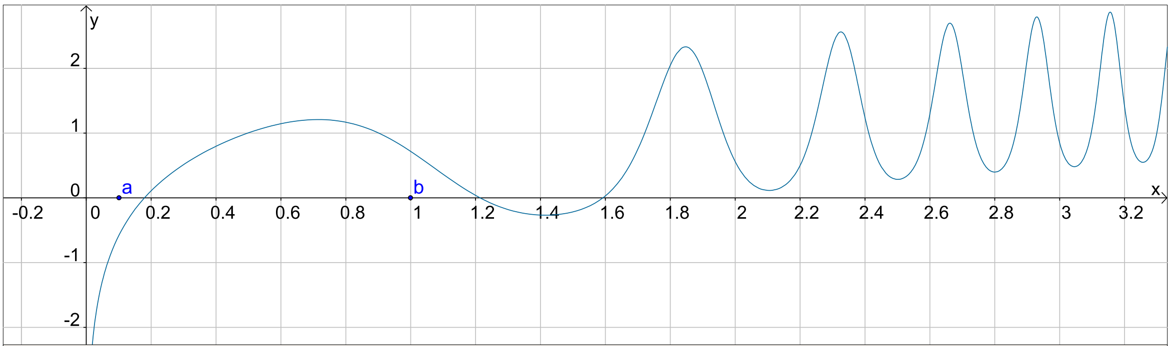

Figura 6 – Intervalo ente 0,1 (a) e 1 (b). Observando o gráfico, a Função (1) é contínua no intervalo desejado.

No Método da Bisseção, o intervalo que contém a raiz é diminuido até que se chegue próximo a um valor que tenha a precisão desejada: (*b* – *a*) < ε, fazendo sucessivamente a divisão de [*a*, *b*] ao meio. ε é a precisão que o valor encontrado de ter. Neste caso, a precisão desejada é de 0,0001, portanto a função f($\bar{x}$) ≤ 0,0001, o qual $\bar{x}$ é o valor aproximado da raiz.

Tendo *a* = 0,1 e *b* = 1, faz-se o seguinte teste para comprovar se há uma raiz no intervalo [*a*, *b*]:

Para f(*a*):

$$f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1$$

$$f(a) = e^{\cos(0,1^3)} + \ln(0,1) - 1$$

$$f(a) = 2,718280469 - 2,302585093 - 1$$

$$f(a) = -0,5843046237$$

Para f(*b*):

$$f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1$$

$$f(b) = e^{\cos(1^3)} + \ln(1) - 1$$

$$f(b) = 1{,}7165257 + 0 - 1$$

$$f(b) = 0{,}7165257$$

Fazendo f(*a*) · f(*b*):

$$-0{,}5843046237 \cdot 0{,}7165257 < 0 \quad (2)$$

$$-0{,}4186692795 < 0 \quad (3)$$

Como f(*a*) · f(*b*) resultou em um valor menor do que zero, é confirmado que há uma raiz dentro do intervalo escolhido. Essa comprovação é válida pois, para tal ocorrer, é necessário que uma das raízes seja negativa e entre um valor negativo e positivo, há um zero.

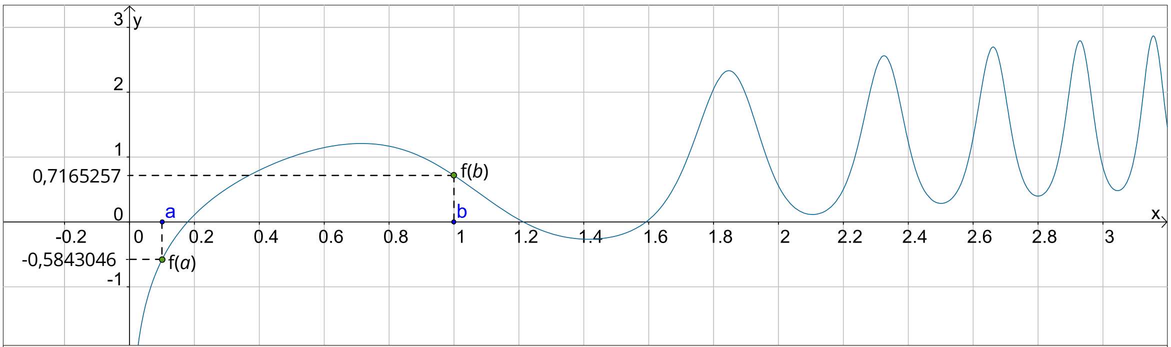

Figura 7 – Marcação dos pontos de f(*a*) e f(*b*)

A Fig. 7 ilustra a comprovação dita acima. Através do gráfico, é possível ver que, com certeza, há uma raiz dentro do intervalo escolhido. Além disso, é possível comprovar, também, que a Função 1 é contínua no intervalo entre *a* e *b*.

As iterações ocorrem da seguinte forma:

Função: $\boldsymbol{f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1}$

Intervalo [*a*, *b*], sendo *a* = 0,1 e *b* = 1. Precisão (ε) = 0,0001.

k = 0 → Primeira iteração

Se *(b – a)* < ε, então x_0 é a raiz procurada, finaliza o método.

$$b - a < \varepsilon \Longrightarrow 1 - 0{,}1 < 0{,}0001 \Longrightarrow 0{,}9 < 0{,}0001 \Longrightarrow 0{,}9 > 0{,}0001$$

Como a diferença dos extremos do intervalo não foi menor que o erro, o processo continua:

k = 1 → Segunda iteração, que é repetida até chegar à raiz.

Anteriormente foi calculado f(*a*), que resultou em:

$$f(a) = -0{,}5843046237$$

Este valor, –0,5843046237, ficará fixo pelas próximas iterações, e será atribuído a uma variável M. De posse desta informação, prossegue-se a iteração:

M = f(*a*) = –0,5843046237

Acha-se então um novo valor para x:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \Longrightarrow x_0 = \frac{1+0{,}1}{2} \Longrightarrow x_0 = \frac{1{,}1}{2} \Longrightarrow x_0 = 0{,}55$$

Fazendo-se f(*x*):

$$f(x) = e^{\cos(0{,}55^3)} + \ln(0{,}55) - 1 \Longrightarrow f(x) = 2{,}681004603 + (-0{,}5978370008) - 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = 1{,}083167602}$$

Se M · f(*x*) > 0, *a* = *x*. Senão, *b* = *x*. Veja:

M · f(*x*) > 0 $\Longrightarrow$ –0,5843046237 · 1,083167602 > 0 $\Longrightarrow$ –0,6328998381 > 0

$\Longrightarrow$ –0,6328998381 < 0 $\Longrightarrow$ –0,6328998381 > 0 $\Longrightarrow$ *b* = *x*

Como "M · f(*x*)" resultou em um valor menor do que zero, *b* assumiu o valor de *x*.
b – *a* = 0,9 não é menor do que ε e |f(*x*)| também não. Portanto, 0,55 não é a raiz.

k = 2 → Segunda iteração

a_1 = 0,1 e b_1 = 0,55. M = –0,5843046237. Acha-se um novo valor para *x*:

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{0{,}1+0{,}55}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{0{,}65}{2} \Longrightarrow x_1 = 0{,}325$$

$$f(x) = e^{\cos(0{,}325)} + \ln(0{,}325) - 1 \Longrightarrow f(x) = 0{,}5927507217$$

M · f(*x*) = –0,3463469874, não é maior que "0". Portanto, *b* = x.
b – *a* = 0,45 não é menor do que ε e |f(*x*)| também não. Portanto, 0,325 não é a raiz.

k = 3 → Terceira iteração

a_2 = 0,1 e b_2 = 0,325. M = –0,5843046237. Acha-se um novo valor para *x*:

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \Longrightarrow x_2 = 0{,}2125$$

$$f(x) = e^{\cos(0{,}2125^3)} + \ln(0{,}2125) - 1 \Longrightarrow f(x) = 0{,}1693433954$$

M · f(*x*) = –0,09894812893, não é maior que "0". Portanto, *b* = x.
b – *a* = 0,225 não é menor do que ε. Portanto, 0,2125 não é a raiz.

k = 4 → Quarta iteração

a_3 = 0,1 e b_3 = 0,2125. M = –0,5843046237. Acha-se um novo valor para *x*:

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} \Longrightarrow x_3 = 0{,}15625$$

$$f(x) = e^{\cos(0{,}15625^3)} + \ln(0{,}15625) - 1 \Longrightarrow f(x) = -0{,}1380359399$$

M · f(*x*) = 0,08065503792, é maior que "0". Portanto, *a* = x.

b – *a* = 0,1125 não é menor do que ε e |f(x)| também não. Portanto, 0,15625 não é a raiz.

As iterações prosseguem até a décima quarta, quando encontra-se a raiz:

k = 14 → Décima quarta iteração

a_{13} = 0,1793212891 e b_{13} = 0,1794311523. M = –0,5843046237. Acha-se um novo valor para *x*:

$$x_{13} = \frac{a_{13}+b_{13}}{2} \Longrightarrow x_{13} = 0{,}1793762207$$

$$f(x) = e^{\cos(0{,}1793762207)} + \ln(0{,}1793762207) - 1 \Longrightarrow f(x) = \text{-}0{,}00003333272033$$

M · f(*x*) = 0,00001947646261 não é maior que "0". Portanto, *b* = x.
b – *a* = 0,0001098632812 não é menor do que ε mas |f(*x*)| sim, portanto 0,179376220703125 é a raiz de f(x).

Dessa forma, através do estreitamento do intervalo, chegou-se até a raiz. Na planilha eletrônica, foi definido dessa forma:

Iteração (k)	a	b	x_k	f(a)	f(b)	f(x_k)	b – a
Número de iterações	Limite inferior do intervalo	Limite superior do intervalo	Média dos limites superior e inferior	Resultado da função ao em relação ao limite inferior	Resultado da função ao em relação ao limite superior	Resultado da função ao em relação ao x_k encontrado	Diferença entre os limites superior e inferior

Com a execução do algoritmo, obteve-se o seguintes valores:

Iteração (k)	a	b	xk	f(a)	f(b)	f(x)	b - a	Testa se "a" é raiz	Testa se "b" é raiz	Testa se "b - a" é menor que o erro	Testa se "x" é menor que o erro
k = 0	0,1	1	0,55	-0,584304623675461	0,716525699548904	1,0831676018152	0,9	não	não	não	não
k = 1	0,1	0,55	0,325	-0,584304623675461	1,0831676018152	0,592750721687975	0,45	não	não	não	não
k = 2	0,1	0,325	0,2125	-0,584304623675461	0,592750721687975	0,169343395359719	0,225	não	não	não	não
k = 3	0,1	0,2125	0,15625	-0,584304623675461	0,169343395359719	-0,138035939914012	0,1125	não	não	não	não
k = 4	0,15625	0,2125	0,184375	-0,138035939914012	0,169343395359719	0,027444885209047	0,05625	não	não	não	não
k = 5	0,15625	0,184375	0,1703125	-0,138035939914012	0,027444885209047	-0,051871635255043	0,028125	não	não	não	não
k = 6	0,1703125	0,184375	0,17734375	-0,051871635255043	0,027444885209047	-0,011425792952386	0,0140625	não	não	não	não
k = 7	0,17734375	0,184375	0,180859375	-0,011425792952386	0,027444885209047	0,008198778092242	0,00703125	não	não	não	não
k = 8	0,17734375	0,180859375	0,1791015625	-0,011425792952386	0,008198778092242	-0,001565276975835	0,003515625	não	não	não	não
k = 9	0,1791015625	0,180859375	0,17998046875	-0,001565276975835	0,008198778092242	0,003328690741364	0,0017578125	não	não	não	não
k = 10	0,1791015625	0,17998046875	0,179541015625	-0,001565276975835	0,003328690741364	0,000884706471855	0,00087890625	não	não	não	não
k = 11	0,1791015625	0,179541015625	0,1793212890625	-0,001565276975835	0,000884706471855	-0,000339533525052	0,000439453125	não	não	não	não
k = 12	0,1793212890625	0,179541015625	0,17943115234375	-0,000339533525052	0,000884706471855	0,0002727741759	0,0002197265625	não	não	não	não
k = 13	0,1793212890625	0,17943115234375	0,179376220703125	-0,000339533525052	0,0002727741759	-0,00003333272033	0,00010986328125	não	não	não	0,179376220703125 é a raiz de f(x)

Tabela 1 – Valores obtidos na planilha eletrônica após a criação do algoritmo do método da bisseção na mesma.

As fórmulas utilizadas nos blocos "a", "b", "x_k", "f(a)", "f(b)", "f(x)", "b – a", "Testa se 'a' é raiz", "Testa se 'b' é raiz", "Testa se 'b - a' é menor que o erro" e "Testa se 'x' é menor que o erro", são:

Na primeira iteração (k = 0):

"a" = *a*
"b" = *b*
"x_k" = *(a+b)*/2
"f(a)" = exp(cos(*a*^3))+ln(*a*)-1
"f(b)" = exp(cos(*b*^3))+ln(*b*)-1
"f(x)" = exp(cos(x_k^3))+ln(x_k)-1
"b – a" = *b* – *a*
"Testa se 'a' é raiz" = SE(abs(f(a))<erro;CONCAT(a; "é a raiz de f(x)");"não")

“Testa se ‘b’ é raiz” = SE(abs(f(b))<erro;CONCAT(b; "é a raiz de f(x)");"não")

“Testa se ‘b - a’ é menor que o erro” = SE(abs(b-a)<erro;CONCATENAR((a+b)/2;" é a raiz procurada");"não")

“Testa se ‘x’ é menor que o erro” = SE(abs(f(x))<erro;CONCAT(x; "é a raiz de f(x)");"não")

Na segunda iteração (k = 1) (M = f(a) da primeira iteração):

"a" = SE(M*f(x)$_{k=0}$<0;a$_{k=0}$;x$_{k=0}$)

"b" = SE(f(b)$_{k=0}$*f(x)$_{k=0}$<0;b$_{k=0}$;x$_{k=0}$)

"x$_{k=1}$" = (a$_{k=1}$+b$_{k=1}$)/2

"f(a)$_{k=1}$" = exp(cos(a$_{k=1}$^3))+ln(a$_{k=1}$)-1

"f(b)$_{k=1}$" = exp(cos(b$_{k=1}$^3))+ln(b$_{k=1}$)-1

"f(x)$_{k=1}$" = exp(cos(x$_{k=1}$^3))+ln(x$_{k=1}$)-1

"'b – a"$_{k=1}$' = b$_{k=1}$ – a$_{k=1}$

“Testa se ‘a$_{k=1}$’ é raiz” = SE(abs(f(a$_{k=1}$))<erro;CONCAT(a$_{k=1}$; "é a raiz de f(x)");"não")

“Testa se ‘b$_{k=1}$’ é raiz” = SE(abs(f(b$_{k=1}$))<erro;CONCAT(b$_{k=1}$; "é a raiz de f(x)");"não")

“Testa se ‘b - a’$_{k=1}$ é menor que o erro” = SE(abs(b$_{k=1}$-a$_{k=1}$)<erro;CONCATENAR((a$_{k=1}$+b$_{k=1}$)/2;" é a raiz procurada");"não")

“Testa se ‘x$_{k=1}$’ é menor que o erro” = SE(abs(f(x$_{k=1}$))<erro;CONCAT(x$_{k=1}$; "é a raiz de f(x)");"não")

Da segunda iteração em diante, o processo se repete até encontrar um valor para “a”, “b”, “b – a” ou “x” que iguale a Função 1 a um valor menor do que 0,0001.

Estudo da convergência

Sendo a Função 1 contínua no intervalo [*a*, *b*], e f(*a*) · f(*b*) < 0 e que o método da bisseção divide o intervalo ao meio a cada iteração, sabe-se que convergir-se-á para um valor desejado de raiz.

O método da bisseção gera algumas consequências:

a_k → não decresce e limita-se superiormente por b_0, então o limite de a_k, para k tendendo ao infinito, será um valor *r*. Logo, há *r* ∈ R:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = r$$

b_k → não cresce e limita-se inferiormente por a_0, então o limite de b_k, para k tendendo ao infinito, será um valor *s*. Logo, há *s* ∈ R:

$$\lim_{k\to\infty} b_k = s$$

x_k → é encontrado com a média aritmética de “a_k” e “b_k” ($x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$), há $a_k < x_k < b_k$ para todo k.

Cada intervalo possui metade do tamanho do intervalo anterior. Dessa forma, para todo k:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Então:

$$\lim_{k\to\infty} b_k - a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0$$

Já que a_k e b_k convergem, o limite de b_k, com "k" tendendo ao infinito, menos o limite de a_k, com "k" tendendo ao infinito, é igual à zero. Então, limite de b_k, com "k" tendendo ao infinito, é igual ao limite de a_k, com "k" tendendo ao infinito. Logo, *r* é igual à *s*. Em qualquer "k", o ponto x_k está dentro do intervalo (a_k, b_k). Ou seja:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = r = s$$

Como f(*r*) e f(*s*) tendem à zero e *x* está em ambos, o mesmo tende à zero.

Prevendo o número de iterações

Tendo um erro (ε) e um intervalo inicial [*a*, *b*], é possível adiantar o número de iterações a partir da seguinte fórmula:

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

No caso da função alvo deste documento, com ε = 0,0001, *a* = 0,1 e *b* = 1, tem-se:

$$k > \frac{\log(1-0{,}1) - \log(0{,}0001)}{\log(2)} \Longrightarrow k > \frac{\log(0{,}9) - \log(0{,}0001)}{\log(2)} \Longrightarrow k > \frac{-0{,}04575749056 - (-4)}{0{,}3010299957}$$

$$k > \frac{3{,}954242509}{0{,}3010299957} \Longrightarrow k > 13{,}13570928 \Longrightarrow k \Rightarrow 14$$

Iterações vistas no gráfico

Graficamente, as iterações ficam assim:

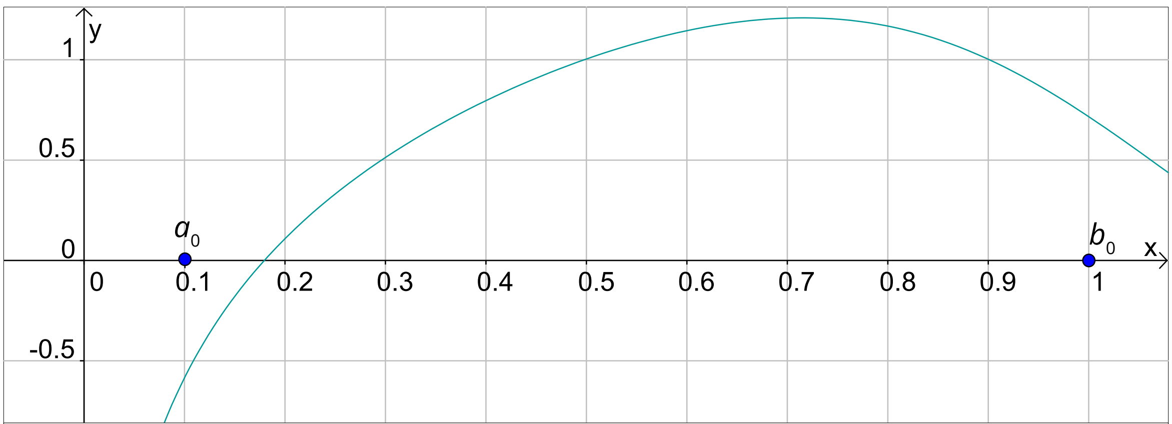

Figura 8 – Primeira iteração da Função 1 pelo método da bisseção.

k = 0, a_0 = 0,1 e b_0 = 1.

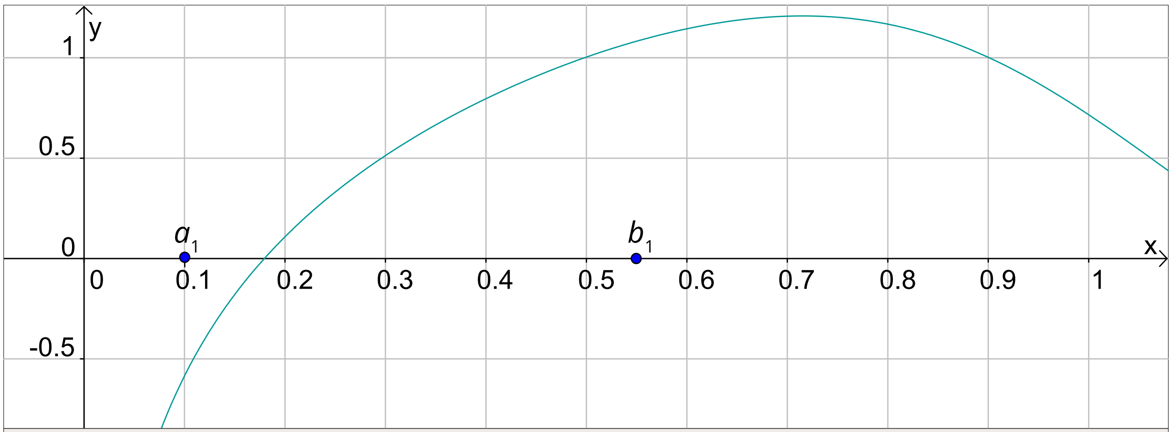

Figura 9 – Segunda iteração da Função 1 pelo método da bisseção.

k = 1, a_0 = 0,1 e b_0 = 0,55.

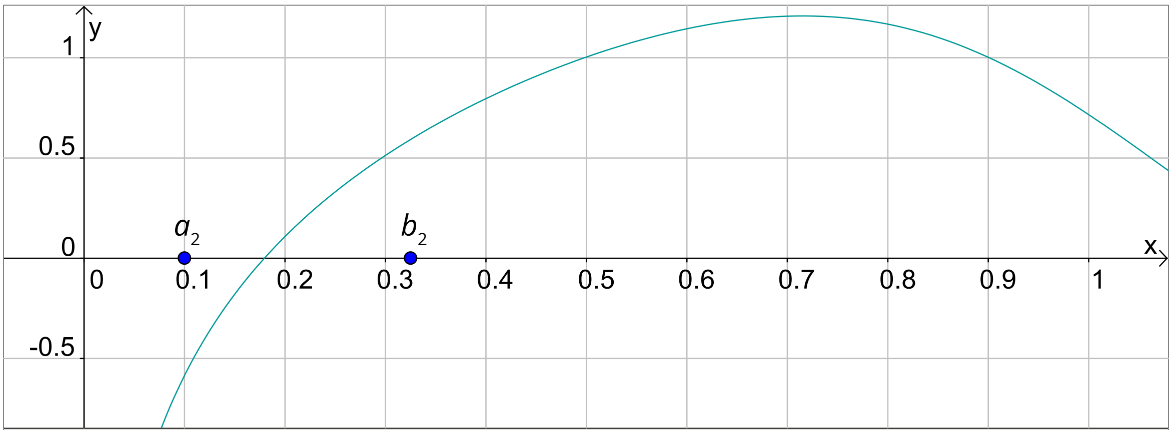

Figura 10 – Terceira iteração da Função 1 pelo método da bisseção.

k = 2, a_2 = 0,1 e b_2 = 0,325.

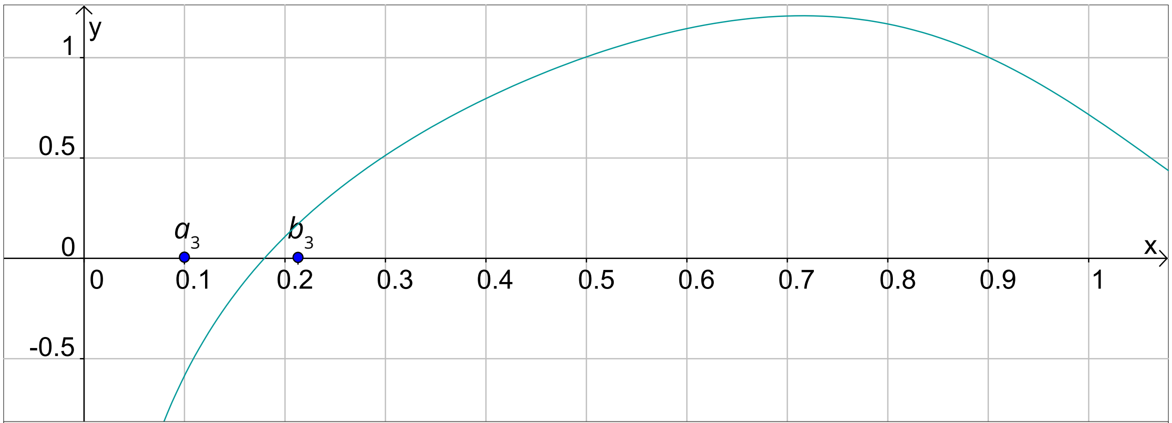

Figura 11 – Quarta iteração da Função 1 pelo método da bisseção.

k = 3, a_3 = 0,1 e b_3 = 0,2125.

Os pontos a_k e b_k vão cada vez mais aproximando-se da raiz. Então, em k = 13, o módulo de f(x) é menor do que o erro. O gráfico da Fig. 12 é uma aproximação muito grande para possibilitar visualizar a distância entre os pontos. Através do gráfico, também, torna-se possível visualizar qual a raiz entre os pontos.

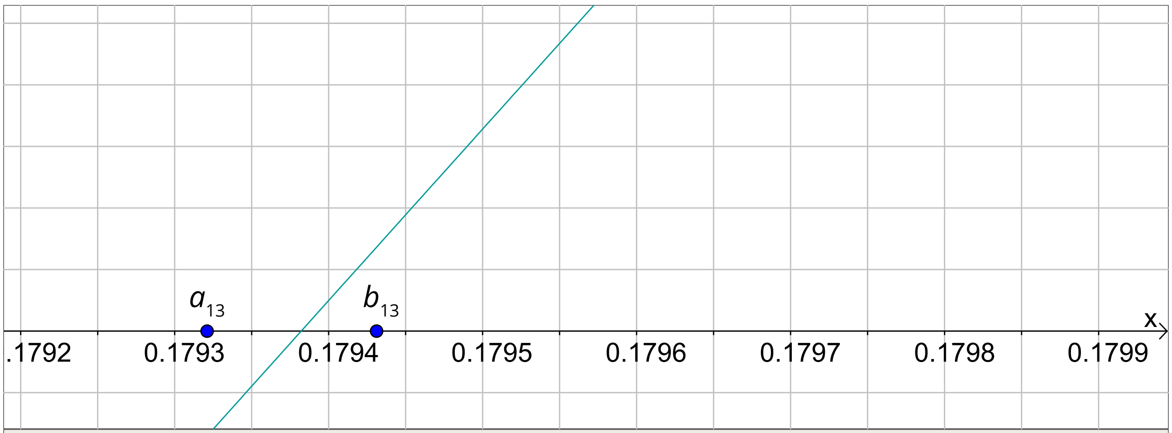

Figura 12 – Décima quarta iteração da Função 1 pelo método da bisseção.

k = 13, a_{13} = 0,1793212891 e b_{13} = 0,1794311523.

Na Fig. 12, a ampliação do gráfico é tamanha que, visualmente é possível estimar o valor da raiz.

Conclusões

Comprovou-se que a função sendo contínua no intervalo desejado e a imagem tendo sinal oposto nos extremos, é possível obter uma raiz entre os pontos *a* e *b*. Além de que, o tamanho do intervalo é satisfaz a precisão desejada.

Não há cálculos muito complexos.

A convergência é lenta, já que, se $b_0 - a_0$ for muito menor do que o erro e este for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande.

Método da Posição Falsa

Possui as mesmas condições que o Método da Bisseção. Porém, em vez de usar a média aritmética para calcular o x_k, faz-se a média aritmética ponderada entre *a* e *b* com pesos |f(*b*)| e |f(*a*)|, respectivamente:

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

sendo que f(*a*) e f(*b*) possuem sinais opostos.

A aproximação da raiz dá-se, então, através de uma reta, como pode ser visto na Fig. 13, abaixo:

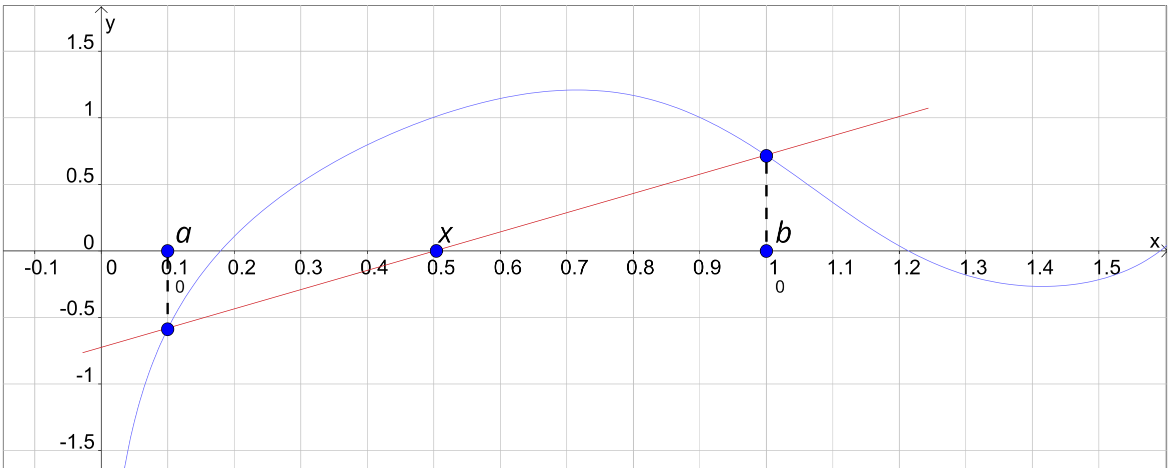

Figura 13 – Reta entre os pontos do intervalo inicial (primeira iteração).

Na Fig. 13, há a = 0,1, b = 1 e x = 0,5042603804.

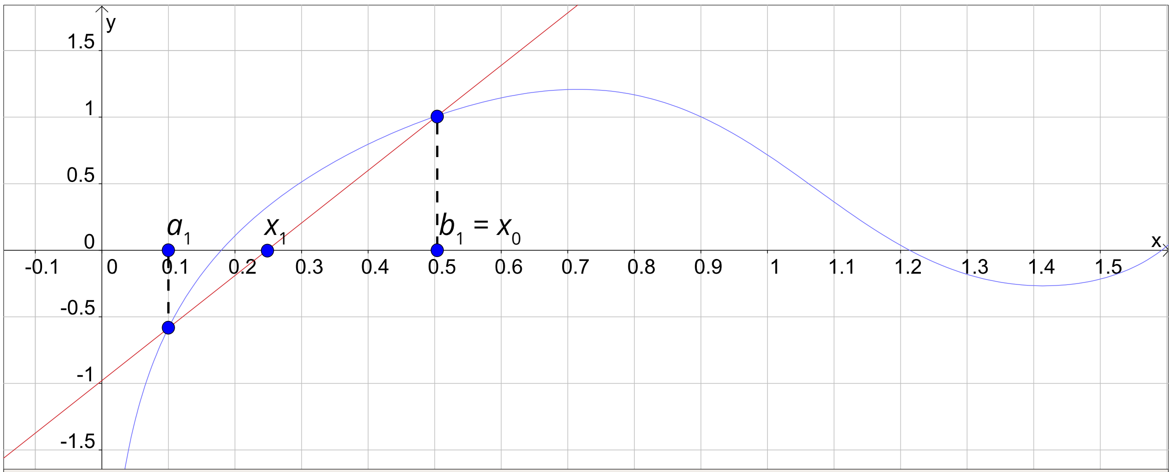

Figura 14 – Reta entre os pontos na segunda iteração.

Na Fig. 14, há a_1 = 0,1, b_1 = 0,5042603804 e x_1 = 0,2480298176.

O valor de a_k é alterado se f(a) · f(x) > 0, do contrário, mantém o valor da iteração anterior. E, dessa forma, o intervalo vai diminuindo cada vez mais, até a, b ou x chegar próximo ao valor de raiz desejado. Graficamente, na última iteração necessária, que no caso da função estudada foi k = 7, a reta fica segundo a Fig. 15:

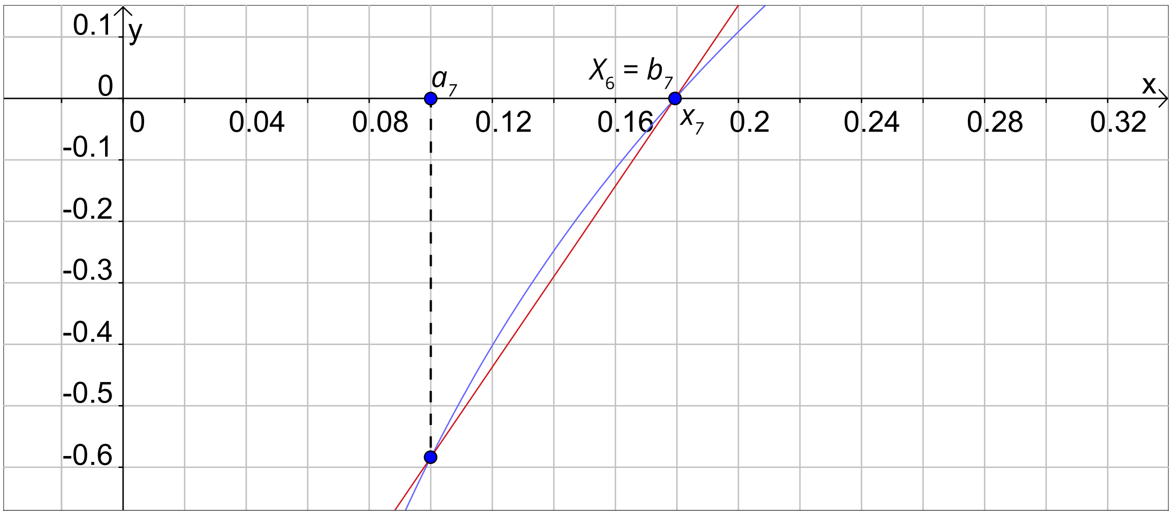

Figura 15 – Reta entre os pontos na oitava iteração.

Na Fig. 15, há a_7 = 0,1, b_7 = 0,1794364697 e x_8 = 0,1793953795.

Teve-se então que f(x) = 0,00007344056976, que é menor do que o erro (0,0001), portanto, sendo a raiz desejada. Na planilha, o Método da Posição Falsa ficou desta forma:

Iteração (k)	a	b	f(a)	f(b)	xk	f(x)	Testa se "a" é raiz	Testa se "b" é raiz	Testa se "b - a" é menor que o erro	Testa se x é a raiz
0	0,1	1	-0,584304623675461	0,716525699548904	0,504260380404135	1,01139557599921	não	não	não	não
1	0,1	0,504260380404135	-0,584304623675461	1,01139557599921	0,248029817560401	0,32375910763895	não	não	não	não
2	0,1	0,248029817560401	-0,584304623675461	0,32375910763895	0,19525158186549	0,084740134904484	não	não	não	não
3	0,1	0,19525158186549	-0,584304623675461	0,084740134904484	0,183187169442203	0,02098360295839	não	não	não	não
4	0,1	0,183187169442203	-0,584304623675461	0,02098360295839	0,180303309393388	0,005120338227732	não	não	não	não
5	0,1	0,180303309393388	-0,584304623675461	0,005120338227732	0,179605714056447	0,001244897646343	não	não	não	não
6	0,1	0,179605714056447	-0,584304623675461	0,001244897646343	0,179436469675817	0,000302400057707	não	não	não	não
7	0,1	0,179436469675817	-0,584304623675461	0,000302400057707	0,179395379521168	7,34405697568885E-05	não	não	não	0.179395379521168 é a raiz procurada

Tabela 2 – Valores obtidos na planilha eletrônica após a criação do algoritmo do método da posição falsa na mesma.

A estruturação possui os seguintes significados:

Iteração (k)	a	b	f(a)	f(b)	x_k	$f(x_k)$
Número de iterações	Limite inferior do intervalo	Limite superior do intervalo	Resultado da função ao em relação ao limite inferior	Resultado da função ao em relação ao limite superior	Média aritmética ponderada das funções com os intervalos	Resultado da função ao em relação ao x_k encontrado

As fórmulas utilizadas nos blocos “a”, “b”, “f(a)”, “f(b)”, “x_k”, “f(x)”, “Testa se ‘a’ é raiz”, “Testa se ‘b’ é raiz”, “Testa se ‘b - a’ é menor que o erro” e “Testa se ‘x’ é raiz”, são:

Na primeira iteração (k = 0):

”a” = *a*

”b” = *b*

”x_k” = $((a_{k=0}*f(b_{k=0}))-(b_{k=0}*f(a_{k=0})))/(f(b_{k=0})-f(a_{k=0}))$

”f(a)” = exp(cos(*a*^3))+ln(*a*)-1

”f(b)” = exp(cos(*b*^3))+ln(*b*)-1

”f(x)” = exp(cos(x_k^3))+ln(x_k)-1

“Testa se ‘a’ é raiz” = SE(abs(f(a))<erro;CONCAT(a; "é a raiz de f(x)");"não")

“Testa se ‘b’ é raiz” = SE(abs(f(b))<erro;CONCAT(b; "é a raiz de f(x)");"não")

“Testa se ‘b - a’ é menor que o erro” = SE(abs(b-a)<erro;CONCATENAR($x_{k=0}$;" é a raiz procurada");"não")

“Testa se ‘x’ é menor que o erro” = SE(abs(f(x))<erro;CONCAT(x; "é a raiz de f(x)");"não")

Na segunda iteração (k = 1) (M = f(a) da primeira iteração):

”a” = SE(M*$f(x)_{k=0}$<0;$a_{k=0}$;$x_{k=0}$)

”b” = SE($f(b)_{k=0}$*$f(x)_{k=0}$<0;$b_{k=0}$;$x_{k=0}$)

”$x_{k=1}$” = $((a_{k=1}*f(b_{k=1}))-(b_{k=1}*f(a_{k=1})))/(f(b_{k=1})-f(a_{k=1}))$

”$f(a)_{k=1}$” = exp(cos($a_{k=1}$^3))+ln($a_{k=1}$)-1

”$f(b)_{k=1}$” = exp(cos($b_{k=1}$^3))+ln($b_{k=1}$)-1

”$f(x)_{k=1}$” = exp(cos($x_{k=1}$^3))+ln($x_{k=1}$)-1

‘”b – a”$_{k=1}$’ = $b_{k=1} – a_{k=1}$

“Testa se ‘$a_{k=1}$’ é raiz” = SE(abs(f($a_{k=1}$))<erro;CONCAT($a_{k=1}$; "é a raiz de f(x)");"não")

“Testa se ‘$b_{k=1}$’ é raiz” = SE(abs(f($b_{k=1}$))<erro;CONCAT($b_{k=1}$; "é a raiz de f(x)");"não")

“Testa se ‘b - a’$_{k=1}$ é menor que o erro” = SE(abs($b_{k=1}$-$a_{k=1}$)<erro;CONCATENAR($x_{k=1}$;" é a raiz procurada");"não")

“Testa se ‘$x_{k=1}$’ é menor que o erro” = SE(abs(f($x_{k=1}$))<erro;CONCAT($x_{k=1}$; "é a raiz de f(x)");"não")

O funcionamento do algoritmo deste método é parecido com o Método da Bisseção, com a diferença de possuir duas possibilidade de erros (ε_1 e ε_2), e uma verificação adicional antes da segunda iteração (k = 0). Esta verificação adicional compara se o módulo de f(*a*) ou módulo de f(*b*) é menor do que o erro, e se for, escolhe-se *a* ou *b*, respectivamente, como raiz que se procura. Além disso, o cálculo do novo *x*, na segunda iteração (k = 1), dá-se pela média aritmética ponderada. O restante do algoritmo é igual ao do Método da Bisseção.

Em relação à convergência, a ideia é a mesma aplicada ao Método da Bisseção, com a diferença que a convergência é mais rápida, ou seja, são necessárias menos iterações.

Conclusões

Em relação ao método explicado anteriormente, este é mais eficiente e necessita de menos iterações para encontrar um valor de raiz que tenha a precisão desejada. Constatou-se, também, que, mesmo tendo poucas diferenças em seu algoritmo em relação ao Método da Bisseção, o uso da média ponderada tornou-o mais eficiente. Mesmo utilizando um intervalo grande, a convergência é rápida.

Método do Ponto Fixo (MPF)

A condição para a execução deste método é a mesma que a dos métodos explicados anteriormente. No Método do Ponto Fixo, transforma-se a equação que se está trabalhando em uma equivalente x = φ(x), que é chamada de função de iteração. Através dela, é gerada uma sequência de iterações $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, a partir de uma aproximação inicial. O cálculo da φ(x) para a função de estudo ficou assim:

$$f(x)=e^{\cos(x^3)}+\ln(x)-1 \Rightarrow \ln(x)=1-e^{\cos(x^3)} \Rightarrow e^{\ln(x)}=e^{1-e^{\cos(x^3)}} \Rightarrow x=\frac{e^1}{e^{e^{\cos(x^3)}}} \Rightarrow \varphi(x)=\frac{e}{e^{e^{\cos(x^3)}}}$$

O gráfico da função φ(*x*) é ilustrado abaixo:

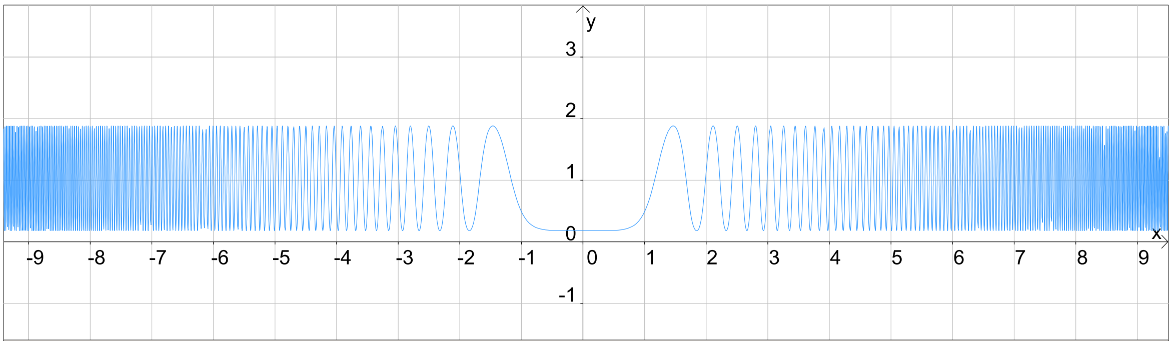

Figura 16 – Gráfico da função de iteração φ(*x*).

No gráfico da Fig. 16, a função não toca o eixo das abcissas.

É possível encontrar outras funções de iteração, no entanto, em alguns casos, elas podem não convergir. O que é feito no Método do Ponto Fixo é justamente encontrar um ponto fixo para a função de iteração. O ponto fixo é um valor de x_k que, ao substituí-lo na função φ(x), esta resulta no próprio x_k.

Por exemplo:

Seja a função:

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

Sua φ(x) pode ser escrita como:

$$\varphi(x) = x^2 - 2.$$

O ponto fixo dessa função é x = 2, já que:

$$\varphi(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$
$$\varphi(2) = 2$$

Ou seja, o ponto *x*, que corresponde à raiz de f(*x*), ao ser substituído na função φ(x), o resultado será o próprio valor de *x*, satisfazendo, então, φ(*x*) = *x*.

É feito um 'chute' inicial, que será usado como ponto de partida para o início das iterações, que ocorrem da seguinte forma:

Função	Função de iteração	Chute inicial (x_0)
$f(x)=e^{\cos(x^3)}+\ln(x)-1$	$\varphi(x)=\dfrac{e}{e^{e^{\cos(x^3)}}}$	x_0 = 0,5

k = 0 $\quad x_0 = 0{,}5$

k = 1 $\quad x_1=\varphi(x_0)=\dfrac{e}{e^{e^{\cos(x_0^3)}}}=\dfrac{e}{e^{e^{\cos(0{,}5^3)}}}=0{,}183203922874281$

k = 2 $\quad x_2=\varphi(x_1)=\dfrac{e}{e^{e^{\cos(x_1^3)}}}=\dfrac{e}{e^{e^{\cos(0{,}183203922874281^3)}}}=0{,}179383296771464$

k = 3 $\quad x_3=\varphi(x_2)=\dfrac{e}{e^{e^{\cos(x_2^3)}}}=\dfrac{e}{e^{e^{\cos(0{,}179383296771464^3)}}}=0{,}179382201822578$

Na quarta iteração (k = 3), é possível comprovar que 0,179383296771464 é o ponto fixo de φ(x), já que φ(0,179383296771464) resultou em um valor muito próximo ao próprio *x* da função de iteração, 0,179382201822578. É interessante ver, também, a iteração vista graficamente:

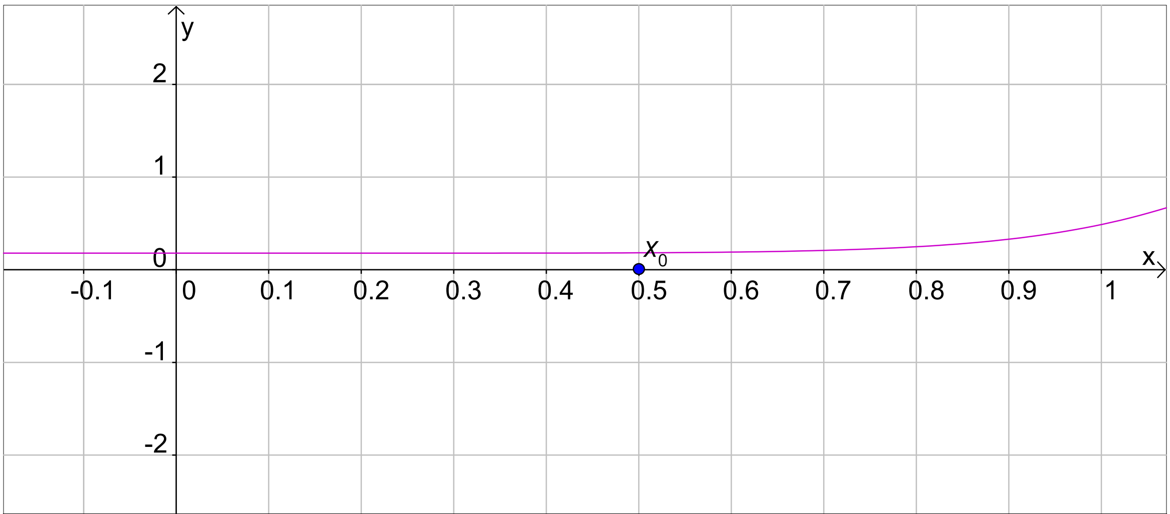

Figura 17 – Primeira iteração da função φ(*x*), com x_0 = 0,5.

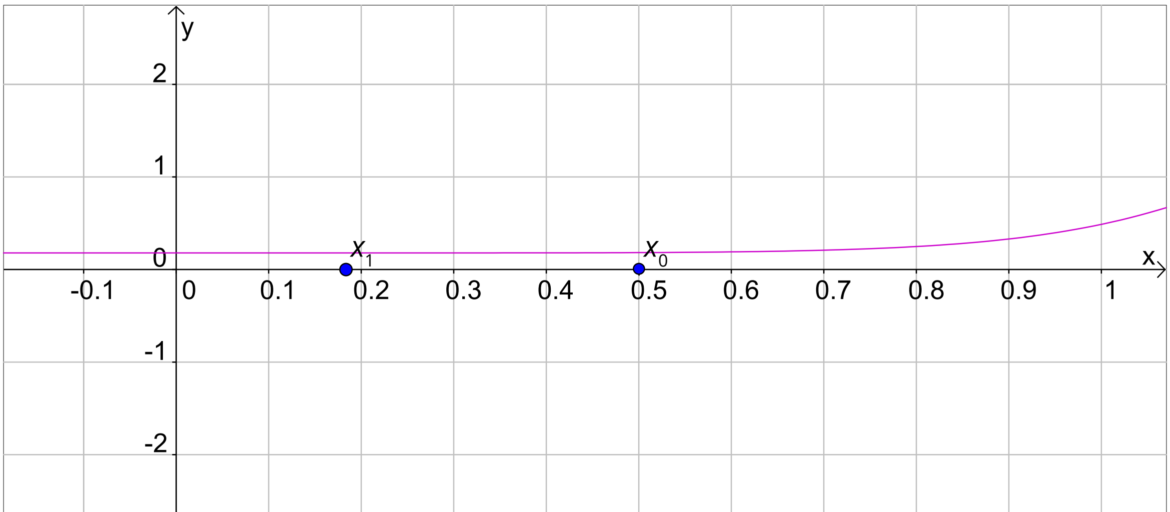

Figura 18 – Segunda iteração da função φ(*x*), com x_1 = 0,1832039229.

Figura 19 – Terceira iteração da função φ(*x*), com x_2 = 0,1793832968.

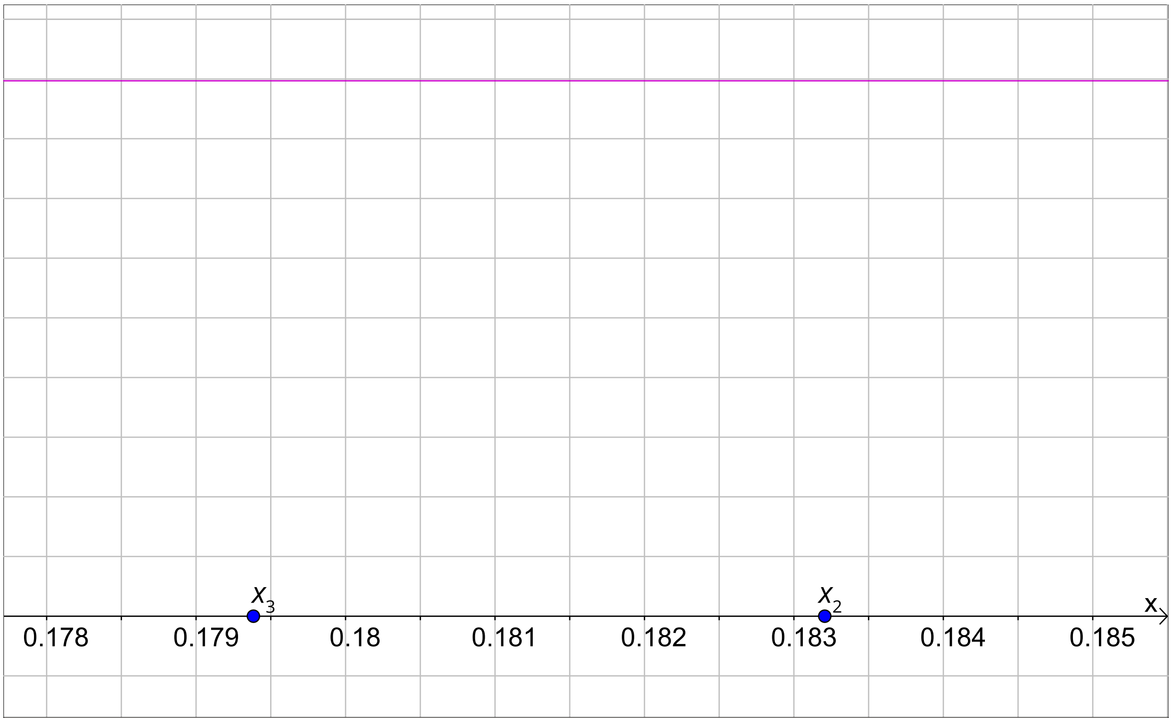

Figura 20 – Quarta iteração da função φ(*x*), com x_3 = 0,179382201822578.

A Fig. 21 ilustra o ponto fixo da função φ(*x*) que possui a mesma coordenada *x* da raiz da função de estudo.

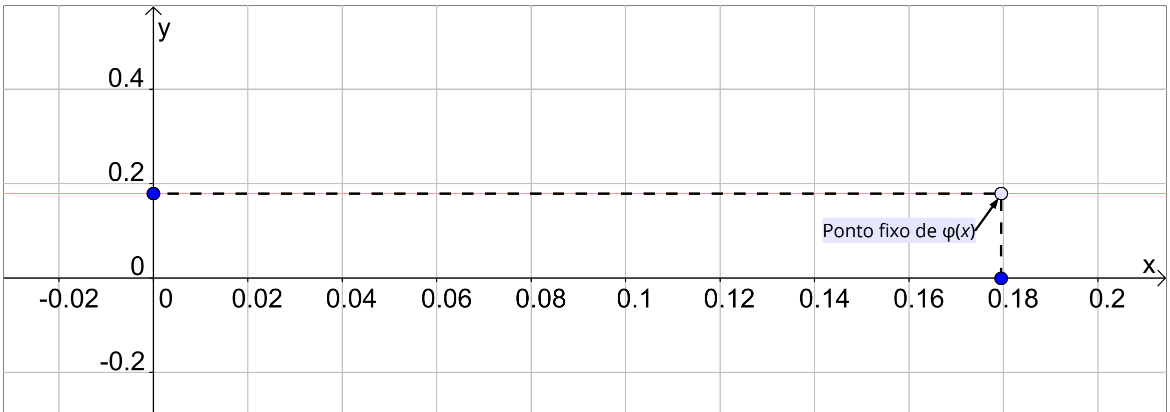

Figura 21 – Gráfico que ilustra o ponto fixo da função φ(*x*).

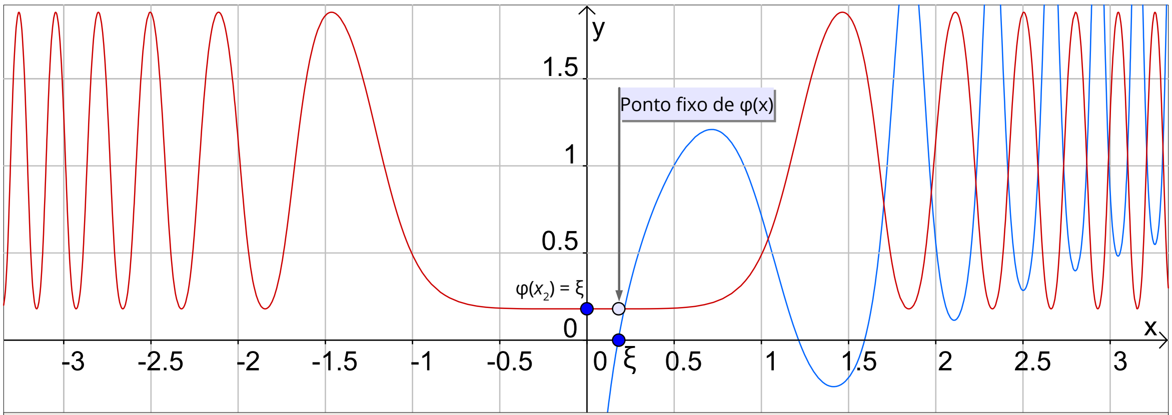

Figura 22 – Gráfico que ilustra a função de iteração sobreposta à Função 1, bem como o ponto fixo da função φ(*x*) e suas coordenadas, sendo a coordenada *x* representada por ξ que vale 0,1793832968.

Figura 23 – Gráfico que ilustra a forma como ocorre a iteração em φ(*x*). No primeiro segmento, uma visão geral do processo. No segundo segmento, uma boa ampliação que mostra a função de iteração convergindo para a raiz da função f(*x*), sendo a coordenada x desta o ponto de intersecção com a reta "y = x".

Conforme mostrado na Fig. 23, a função de iteração converge para um ponto de interseção entre a reta "y = x" e a própria φ(*x*), sendo a coordenada x correspondente à raiz desejada, neste caso, 0,1793832968.

Como nem toda função de iteração encontrada é convergente, há algumas condições que indicam que o processo é converge:

> Seja ξ a raiz da função f(*x*). Se:
> → φ(*x*) e φ'(*x*) são contínua em um intervalo I,
> → |φ'(*x*)| ≤ M < 1, ou seja, o valor M estiver entre |φ'(*x*)| e 1, para todo x pertencente à I,
> → x_0 pertencer à I,

então a sequência que é gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para a raiz ξ.

Como critério de parada, tem-se que, se $|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - x_{k-1}| < \varepsilon$ ou se $|f(x_k)| < \varepsilon$, escolhe-se x_k como a raiz aproximada de ξ.

O algoritmo funciona da seguinte forma: sendo x_0 uma aproximação inicial, ε_1 e ε_2 as precisões, se o módulo de $f(x_0)$ for menor do que o erro, então x_0 é um valor de raiz desejado, e o processo está finalizado.

Caso contrário, começa a próxima iteração (k = 1), com $x_1 = \varphi(x_0)$. Se o módulo de $f(x_1)$ for menor que ε_1 ou $|x_1 - x_0| < \varepsilon_2$, x_1 é um valor de raiz desejado, e o processo está finalizado.

Caso contrário, $x_0 = x_1$ e a próxima iteração inicia repetindo as mesmas instruções do parágrafo anterior.

A planilha montada ficou estruturada da seguinte forma:

Iteração (k)	x_k	$f(x_k)$	Teste
Número de iterações	Média aritmética ponderada das funções com os intervalos	Resultado da função ao em relação ao x_k encontrado	Testa se o módulo de $f(x_k)$ é menor do que o erro.

As fórmulas utilizadas nos blocos "x_k", "$f(x_k)$" e "Teste", são:

Na primeira iteração (k = 0)
"$x_{k=0}$" = chute inicial
"$f(x_{k=0})$" = exp(cos($x_{k=0}$^3))+ln($x_{k=0}$)-1
"Teste" = SE(abs(f($x_{k=0}$))<erro;CONCATENAR($x_{k=0}$;" é a raiz procurada");"não")

Na segunda iteração (k = 1)
"$x_{k=1}$" = exp(1-exp(cos($x_{k=0}$^3)))
"$f(x_{k=1})$" = exp(cos($x_{k=1}$^3))+ln($x_{k=1}$)-1
"Teste" = SE(OU(abs(f($x_{k=1}$))<erro;abs($x_{k=1}$-$x_{k=0}$)<erro);CONCATENAR($x_{k=1}$;" é a raiz procurada");"não")

A planilha com o método em funcionamento ficou da seguinte forma:

Iteração (k)	xk	f(xk)	Teste
0	0,5	1,0040082333422	não
1	0,183203922874281	0,021075025857586	não
2	0,179383296771464	0,000006103980956	0,179383296771464 é a raiz procurada

Tabela 3 – Valores obtidos na planilha eletrônica após a criação do algoritmo do método do ponto fixo na mesma.

As linhas em amarelo são as necessárias para a iteração começar.

O Método do Ponto Fixo possui uma Ordem de Convergência e, quanto maior for esta, mais rápido irá convergir. Seja x_k o resultado do método numérico na iteração k, e $e_k = x_k - \overline{x}$ o seu erro. Se houver um número *p* e uma constante *c* na relação:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_k + 1|}{|e_k|^p} = c$$

Então *p* é a ordem de convergência desse método.

Conclusões

O Método do Ponto Fixo possui um processo de convergência bem rápido, além de um desempenho previsível e regular, no entanto, um fator complicante é a necessidade de obter-se uma função de iteração, o que o torna mais complicado de se implementar. Na função de estudo, foram necessárias apenas três iterações para encontrar a raiz desejada.

Método de Newton-Raphson

As condições de convergência deste método são as mesma do Método do Ponto Fixo, ter um valor M maior ou igual ao módulo da derivada de φ(x) e menor do que 1, para todo x pertencente a um intervalo I, o qual este é centrado na raiz.

O Método de Newton-Raphson tenta acelerar a convergência do método anterior encontrando a derivada de φ(x) tal que φ'(ξ) = 0.

A sequência $\{x_k\}$ será determinada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

A derivada da função de estudo foi obtida da seguinte maneira:

$$f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1 \Rightarrow f'(x) = e^{\cos(x^3)} \cdot (-sen(x^3)) \cdot 3x^2 + \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{f'(x) = -3x^2 \cdot e^{\cos(x^3)} \cdot sen(x^3) + \frac{1}{x}}$$

Logo, a φ(x) pode ser representada da seguinte forma:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1}{-3x^2 \cdot e^{\cos(x^3)} \cdot sen(x^3) + \frac{1}{x}}$$

E a sequência $\{x_k\}$ será determinada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Geometricamente, este método traça uma reta tangente, $L_k(x)$, à curva no ponto $(x_k, f(x_k))$. Tem-se então: $L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$. Essa reta aproxima a função f(x) à valores próximos de x_k. Determina-se o zero de $L_k(x)$:

$L_k(x) = 0$ $\qquad$ $x = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Faz-se, então, $x_{k+1} = x$.

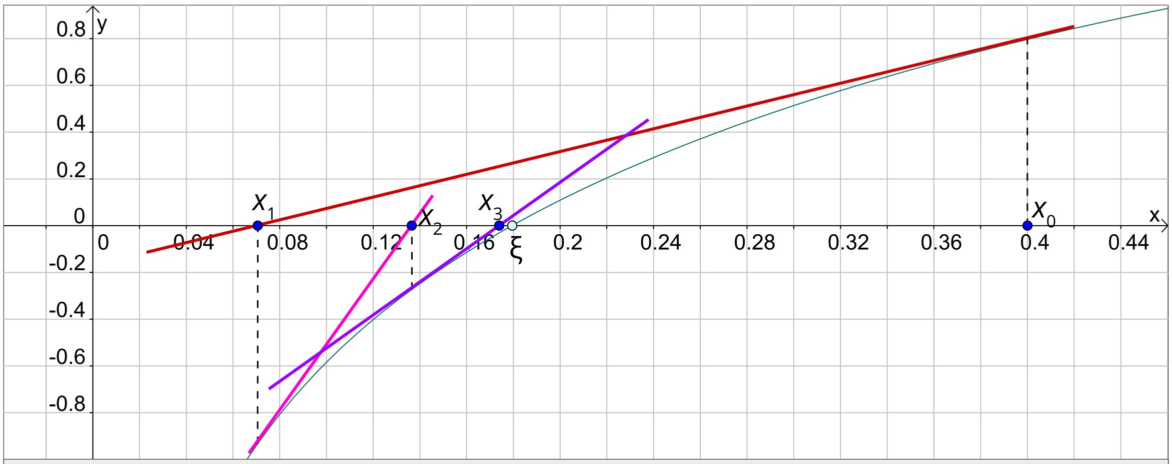

Figura 24 – Gráfico mostrando a iteração do método de Newton-Raphson.

A Fig. 24 mostra as restas tangentes à curva que são geradas a cada iteração de f(x). O processo de iteração ocorre da seguinte forma:

Tendo:

Função: $f(x)=e^{\cos(x^3)}+\ln(x)-1$
x_0 = 0,4

Sendo: $\varphi(x)=x-\dfrac{e^{\cos(x^3)}+\ln(x)-1}{-3x^2\cdot e^{\cos(x^3)}\cdot sen(x^3)+\dfrac{1}{x}}$

Faz-se:

$x_0=0,4$

$$x_1=\varphi(x_0)=0,4-\frac{e^{\cos(0,4^3)}+\ln(0,4)-1}{-3\cdot 0,4^2\cdot e^{\cos(0,4^3)}\cdot sen(0,4^3)+\frac{1}{0,4}}=0,07044962854$$

$$x_2=\varphi(x_1)=0,07044962854-\frac{e^{\cos(0,07044962854^3)}+\ln(0,07044962854)-1}{-3\cdot 0,07044962854^2\cdot e^{\cos(0,07044962854^3)}\cdot sen(0,07044962854^3)+\frac{1}{0,07044962854}}=0,1362902016$$

$$x_3=\varphi(x_2)=0,1362902016-\frac{e^{\cos(0,1362902016^3)}+\ln(0,1362902016)-1}{-3\cdot 0,1362902016^2\cdot e^{\cos(0,1362902016^3)}\cdot sen(0,1362902016^3)+\frac{1}{0,1362902016}}=0,1737304926$$

$$x_4=\varphi(x_3)=0,1737304926-\frac{e^{\cos(0,1737304926^3)}+\ln(0,1737304926)-1}{-3\cdot 0,1737304926^2\cdot e^{\cos(0,1737304926^3)}\cdot sen(0,1737304926^3)+\frac{1}{0,1737304926}}=0,1792920908$$

$$x_5=\varphi(x_4)=0,1792920908-\frac{e^{\cos(0,1792920908^3)}+\ln(0,1792920908)-1}{-3\cdot 0,1792920908^2\cdot e^{\cos(0,1792920908^3)}\cdot sen(0,1792920908^3)+\frac{1}{0,1792920908}}=0,1793821789$$

Tem-se, portanto, x_5 = 0,1793821789 sendo a raiz desejada. Para que a convergência ocorra, x_0 deve ser escolhido próximo o suficiente de ξ. Na função de estudo, valores acima de 0,45 resultam em valores negativos de x_k, o que conflita em ln(x). Dessa forma, 0,4 foi escolhido.

O algoritmo deste método é muito semelhante ao do Ponto Fixo, tendo apenas a diferença na obtenção de um novo x_k:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

A estruturação na planilha eletrônica ficou da seguinte forma:

Iteração (k)	x_k	f(x)	f'(x)	Testa se |f(x)| é menor que o erro
Número de iterações	Valor que gera a sequência de iteração.	Resultado de f(x).	Resultado da derivada de f(x)	Teste se o módulo da função de estudo é menor que o erro.

A planilha com o método em funcionamento ficou da seguinte forma:

Iteração (k)	x_k	f(x)	f'(x)	Teste se |f(x)| é raiz
0	0,4	0,796431648231559	2,41672204674488	não
1	0,070449628535361	-0,934575651097723	14,1945248513926	não
2	0,13629020163535	-0,274695713292648	7,33690114268748	não
3	0,173730492563412	-0,032005614856713	5,75475134243015	não
4	0,179292090789339	-0,000502329236789	5,57598005641556	não
5	0,179382178851295	-0,0000001263645228	5,57317516861867	0.179382178851295 é a raiz procurada

Tabela 4 – Valores obtidos na planilha eletrônica após a criação do algoritmo de Newton-Raphson na mesma.

As fórmulas utilizadas nos blocos "x_k", "f(x)", "f'(x)" e "Teste se |f(x)| é raiz" são:

Na primeira iteração (k = 0)

"$x_{k=0}$" = chute inicial

"$f(x_{k=0})$" = exp(cos($x_{k=0}$^3))+ln($x_{k=0}$)-1

"$f'(x_{k=0})$" = (-3*($x_{k=0}$^2)*exp(cos($x_{k=0}$^3))*SEN($x_{k=0}$^3))+(1/$x_{k=0}$)

"Teste se |f(x)| é raiz" = SE(abs(f($x_{k=0}$))<erro;CONCATENAR(B8;" é a raiz procurada");"não")

Na segunda iteração (k = 1)

"$x_{k=1}$" = $x_{k=0}$-(f($x_{k=1}$)/f'($x_{k=0}$))

"$f(x_{k=1})$" = exp(cos($x_{k=1}$^3))+ln($x_{k=1}$)-1

"$f'(x_{k=1})$" = (-3*($x_{k=1}$^2)*exp(cos($x_{k=1}$^3))*SEN($x_{k=1}$^3))+(1/$x_{k=1}$)

"Teste se |f(x)| é raiz" = SE(OU(abs(f($x_{k=1}$))<erro;abs($x_{k=1}$-$x_{k=0}$)<erro);CONCATENAR($x_{k=1}$;" é a raiz procurada");"não")

Com relação à Ordem de Convergência, remetendo ao que foi explanado no método anterior, este método tem ordem *p* = 2, ou seja, ordem de convergência quadrática. Tendo as iterações:

x_0 = 0,4
x_1 = 0,070449628535361
x_2 = 0,13629020163535
x_3 = 0,173730492563412
x_4 = 0,179292090789339
x_5 = 0,179382178851295
x_6 = 0,179382201524999
x_7 = 0,179382201525
x_8 = 0,179382201525

Observando as iterações, nota-se que há acerto nos dígitos conforme k avança:

$x_0 = 0{,}4$
$x_1 = 0{,}070449628535361$
$x_2 = 0{,}13629020163535$
$x_3 = 0{,}173730492563412$
$x_4 = 0{,}\underline{17}9292090789339$ → Acerto de dois dígitos.
$x_5 = 0{,}\underline{179382}178851295$ → Acerto de cinco dígitos.
$x_6 = 0{,}\underline{17938220152}4999$ → Acerto de 11 dígitos.
$x_7 = 0{,}\underline{179382201525}$ → Acerto de 12 dígitos.
$x_8 = 0{,}\underline{179382201525}$

Os dígitos corretos começam a aparecer em x_4 e a quantidade vai praticamente duplicando com o decorrer das iterações. Isso ocorre devido à ordem de convergência quadrática.

Conclusões

Este método possui a desvantagem de ser necessário calcular a derivada da função de estudo, entretanto, possui rápida convergência e um índice quadrático de dígitos corretos para o valor da raiz.

Método das Secantes

Neste método, ao invés de calcular o novo x_k através da diferença de f(x) e derivada de f(x), como ocorre no método de Newton-Raphson, faz-se o quociente das diferenças:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

A função de iteração pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \boxed{\frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

As iterações ocorrem da seguinte forma:

Tendo:

Função: $f(x) = e^{\cos(x^3)} + \ln(x) - 1$
$x_0 = 0{,}1$ e $x_1 = 0{,}6$, faz-se:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_0) - f(x_1)} = \frac{0{,}1 \cdot f(0{,}6) - 0{,}6 \cdot f(0{,}1)}{f(0{,}6) - f(0{,}1)} = 0{,}2689402636$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{0{,}6 \cdot f(0{,}2689402636) - 0{,}2689402636 \cdot f(0{,}6)}{f(0{,}2689402636) - f(0{,}6)} = 0{,}0881014525$$

$$x_4=\frac{x_2 f(x_3)-x_3 f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)}=\frac{0{,}2689402636\cdot f(0{,}0881014525)-0{,}0881014525\cdot f(0{,}2689402636)}{f(0{,}0881014525)-f(0{,}2689402636)}=0{,}2033638716$$

$$x_5=\frac{x_3 f(x_4)-x_4 f(x_3)}{f(x_3)-f(x_4)}=\frac{0{,}0881014525\cdot f(0{,}2033638716)-0{,}2033638716\cdot f(0{,}0881014525)}{f(0{,}2033638716)-f(0{,}0881014525)}=0{,}1860792757$$

$$x_6=\frac{x_4 f(x_5)-x_5 f(x_4)}{f(x_4)-f(x_5)}=\frac{0{,}2033638716\cdot f(0{,}1860792757)-0{,}1860792757\cdot f(0{,}2033638716)}{f(0{,}1860792757)-f(0{,}2033638716)}=0{,}1789456056$$

$$x_7=\frac{x_5 f(x_6)-x_6 f(x_5)}{f(x_5)-f(x_6)}=\frac{0{,}1860792757\cdot f(0{,}1789456056)-0{,}1789456056\cdot f(0{,}1860792757)}{f(0{,}1860792757)-f(0{,}1789456056)}=0{,}1793903193$$

$$x_8=\frac{x_6 f(x_7)-x_7 f(x_6)}{f(x_6)-f(x_7)}=\frac{0{,}1789456056\cdot f(0{,}1793903193)-0{,}1793903193\cdot f(0{,}1789456056)}{f(0{,}1789456056)-f(0{,}1793903193)}=0{,}1793822114$$

A planilha com o método em funcionamento ficou da seguinte forma:

Iteração (k)	xk-1	xk	f(xk-1)	f(xk)	xk+1	Erro	Módulo de "xk+1" - "xk"	Testa se "xk-1" é raiz	Testa se "|f(xk)|" é menor que o erro
0	0,1	0,6	-0,584304623675461	1,14501854455211	0,268940263569802	0,404501620990588	0,331059736430198	não	não
1	0,6	0,268940263569802	1,14501854455211	0,404501620990588	0,088101452504323	-0,710985066290331	0,180838811065479	não	não
2	0,268940263569802	0,088101452504323	0,404501620990588	-0,710985066290331	0,20336387162531	0,125427256583853	0,115262419120987	não	não
3	0,088101452504323	0,20336387162531	-0,710985066290331	0,125427256583853	0,186079275712274	0,036642924148194	0,017284595913036	não	não
4	0,20336387162531	0,186079275712274	0,125427256583853	0,036642924148194	0,178945605619834	-0,002436195876182	0,00713367009244	não	não
5	0,186079275712274	0,178945605619834	0,036642924148194	-0,002436195876182	0,179390319258483	0,00004524051963	0,000444713638649	não	não
6	0,178945605619834	0,179390319258483	-0,002436195876182	0,00004524051963	0,17938221142379	0,0000000005516768065	0,000008107834692	0.178945605619834 é a raiz procurada	0.178945605619834 é a raiz procurada

Tabela 5 – Valores obtidos na planilha eletrônica após a criação do algoritmo da secante na mesma.

Seja um intervalo [*a*, *b*], um erro ε.

As fórmulas utilizadas nos blocos “x_{k-1}”, “x_k”, “f(x_{k-1})”, “f(x_k)”, “x_{k+1}”, “Erro”, “Módulo de ‘x_{k+1}’ - ‘x_k’”, “Testa se ‘x_{k-1}’ é raiz” e “Testa se ‘|f(x_k)|’ é menor que o erro” são:

Na primeira iteração (k = 0)

“x_{k-1}” = *a*

”$x_{k=0}$” = *b*

“f(x_{k-1})” = exp(cos(*a*^3))+ln(*a*)-1

“f(x_k)” = exp(cos(*b*^3))+ln(*b*)-1

“x_{k+1}” = ((x_{k-1}*f(x_k))-(*b**f(x_{k-1})))/(f(x_k)-f(x_{k-1}))

“Erro” = exp(cos(x_{k+1}^3))+ln(x_{k+1})-1

“Módulo de ‘x_{k+1}’ - ‘x_k’” = abs(x_{k+1}-*b*)

“Testa se ‘x_{k-1}’ é raiz” = SE(abs(x_{k+1}-*b*)<erro;"sim";"não")

“Testa se ‘|f(x_k)|’ é menor que o erro” = SE(abs(f(x_k))<erro;"sim";"não")

Na segunda iteração (k = 1)

“x_{k-1}” = ”$x_{k=0}$”

”$x_{k=1}$” = “x_{k+1}” anterior

“f(x_{k-1})” = exp(cos(*a*^3))+ln(*a*)-1

“f($x_{k=1}$)” = exp(cos(*b*^3))+ln(*b*)-1

“x_{k+1}” = ((x_{k-1}*f(x_k))-(*b**f(x_{k-1})))/(f(x_k)-f(x_{k-1}))

“Erro” = exp(cos(x_{k+1}^3))+ln(x_{k+1})-1

“Módulo de ‘x_{k+1}’ - ‘x_k’” = abs(x_{k+1}-*b*)

“Testa se ‘x_{k-1}’ é raiz” = SE(abs(x_{k+1}-*b*)<erro;"sim";"não")

“Testa se ‘|f($x_{k=1}$)|’ é menor que o erro” = SE(abs(f($x_{k=1}$))<erro;"sim";"não")

No começo de cada iteração, x_{k-1} assume o valor de x_k, x_k assume o valor de x_{k+1} e x_{k+1} é recalculado com os valores de x_{k-1} e x_k.

O algoritmo funciona da seguinte forma: dado x_0 e x_1 iniciais, e uma precisão, tem-se que, se módulo de $f(x_0)$ for menor que o erro, x_0 é a raiz desejada, e o processo é finalizado.

Caso contrário, se o módulo de $f(x_1)$ for menor que o erro ou se a diferença entre o módulo de x_1 menos x_0 for menor que o erro, x_1 é a raiz desejada, e o processo é finalizado.

Senão, a próxima iteração inicia, calcula-se x_2, se módulo de $f(x_2)$ for menor que o erro ou se a diferença entre o módulo de x_2 menos x_1 for menor que o erro, x_2 é a raiz desejada, e o processo é finalizado.

Caso contrário, $x_0 = x_1$ e $x_1 = x_2$, a próxima iteração inicia e o parágrafo anterior se repete.

Em relação à convergência, as condições são praticamente as mesmas do método de Newton-Raphson. A ordem de convergência é equivalente a $p = 1,618$ (número áureo).

Conclusões

Este método possui cálculos mais simples do que o método de Newton-Raphson, possui rápida convergência.