Mecânica dos Fluidos – uma aplicação da lei de Bernoulli.

- Problema:

Determinar o tempo total de esvaziamento de um reservatório com água, cilíndrico, aberto no topo, de altura H e de base B, através de um orifício de diâmetro d localizado na base do reservatório.

- Solução:

Considerando uma linha de corrente entre os pontos 1 (topo do reservatório) e 2 (orifício na base) podemos empregar a lei de Bernoulli para escoamentos, mas antes se deve determinar a velocidade com que a água sai do reservatório nos respectivos pontos.

- Velocidade em 1 (topo do reservatório):

Com o topo do reservatório aberto, consideramos que o fluido está sob influência somente da pressão atmosférica e, por isso, a sua velocidade varia muito pouco em relação ao tempo.

A velocidade instantânea em 1 será então a derivada da função altura $h(t)$ quando Δt tende a zero. Assim

$$V_1 = \frac{dh}{dt}.$$

- Velocidade em 2:

No ponto 2, utilizaremos a lei de Bernoulli para determinar a velocidade:

$$\frac{p_0}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_0}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gh_2$$

Considerando no ponto 2 $h_2 = 0$, $p_1 = p_2 = p_0$, $V_1 \approx 0$ e $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{água}$, temos:

$$gh_1 = \frac{V_2^2}{2} \Rightarrow V_2^2 = 2gh_1 \Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

- Tempo de esvaziamento:

Agora com as equações das velocidades em 1 e 2, podemos relacioná-las através da equação da continuidade

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

onde A_1 e A_2 são respectivamente as áreas do topo e do orifício na base do reservatório, logo

$$\frac{dh}{dt}\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) = \sqrt{2gh}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right).$$

Separando variáveis temos

$$\frac{dh}{dt} D^2 = \left(\sqrt{2gh}\right) d^2$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \left(\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}\right)\, dt\,.$$

Agora, como a altura varia de 0 a H e o tempo de 0 a t, esta equação pode ser integrada, resultando em

$$\int_0^H h^{-1/2}\, dh = \left(\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}\right)\int_0^t dt$$

$$2\sqrt{H} = \left(\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}\right) t\,.$$

Resolvendo a equação para t, obtemos

$$t = \frac{2\sqrt{H}}{\left(\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}\right)}$$

$$t = \frac{D^2\sqrt{2gH}}{gd^2}\,.$$

Supondo que H = 30 m, D = 5 m, d = 2,5 m e considerando g = 9,8 m/s^2 , o tempo pode ser calculado

$$t = \frac{(5)^2\sqrt{(2.9,8.30)}}{9,8.(2,5)^2} = \frac{25.24,25}{61,25} = \frac{606,25}{61,25} = 9,898\ s\,.$$