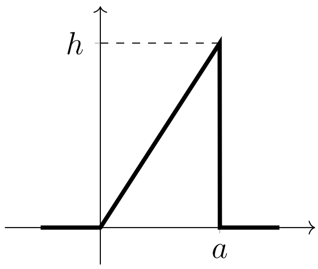
INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
COORDENADORIA DE ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

PRE29006 | **LISTA DE EXERCÍCIOS #1** | **2016.2**

Exercícios

1. Considere uma variável aleatória X cuja função densidade de probabilidade está mostrada abaixo, onde a é uma constante positiva.



(a) Determine o valor da constante h.

(b) Determine e esboce a função de distribuição acumulada de X.

(c) Determine $\Pr[X \leq a/2]$.

(d) Determine a média e a variância de X.

Suas respostas deve estar em função de a.

2. [2, Exercício 2.4.30] Uma variável aleatória contínua X é definida pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{x}}, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine e esboce a função de distribuição acumulada de X.

(b) Calcule a probabilidade de X assumir valores maiores que $1/2$.

(c) Calcule a probabilidade de que, em 4 experimentos independentes, a variável X assuma pelo menos uma vez um valor maior que $1/2$.

3. [3, Problem 4.33] Determine a função massa de probabilidade de uma variável aleatória X que representa o número de experimentos de Bernoulli necessários para alcançar o segundo sucesso.

4. [4] Considere duas variáveis aleatórias discretas X e Y distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,10	0,20	0,20
1	0,04	0,08	0,08
2	0,06	0,12	0,12

(a) Determine as funções massa de probabilidade marginais de X e Y.

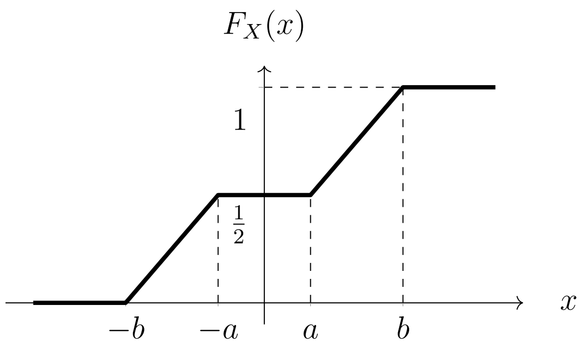
(b) Determine as funções massa de probabilidade de $X + Y$ e XY.

(c) São X e Y independentes?

(d) Determine as PMFs condicionais de X, dado $Y = 0$, e de Y, dado $X = 1$.

(e) Determine $\Pr[X \geq 1, Y \leq 1]$ e $\Pr[X \leq 1 \mid Y = 0]$.

5. Considere uma variável aleatória X cuja função de distribuição acumulada está mostrada abaixo, em que a e b são constantes tais que $0 < a < b$.



Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X. Sua resposta deve estar em função de a e b.

6. Sejam B_1, B_2, B_3 três variáveis aleatórias discretas independentes, cada qual distribuída uniformemente sobre o conjunto $\{0, 1\}$. Sejam $X = B_1 + B_2 + B_3$ e $Y = B_1 B_2 B_3$.

(a) Determine a função massa de probabilidade conjunta de X e Y.

(b) Determine e esboce as funções massa de probabilidade marginais de X e Y.

(c) Determine a covariância entre X e Y.

(d) São X e Y variáveis aleatórias correlacionadas ou descorrelacionadas? São dependentes ou independentes? Justifique.

7. Considere a variável aleatória X definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado.

- Se o resultado for 1, então $X = -1$.
- Se o resultado for 2 ou 3, então $X = 0$.
- Se o resultado for 4, então $X = 1$.
- Se o resultado for 5 ou 6, então $X \sim \text{Unif}(-2, 2)$.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

(b) Determine $\Pr[1 \leq 2X \leq 3]$.

(c) Determine $\Pr[X \neq 1 \mid 1 \leq 2X \leq 3]$.

8. Determine a média e a variância das seguintes distribuições de probabilidade.

(a) $\text{Bern}(p)$.

(b) $\text{Unif}(a, b)$.

(c) $\text{Geom}(p)$.

(d) $\text{Exp}(\lambda)$.

(e) $\text{Rayleigh}(\sigma)$.

(f) $\text{Laplace}(\alpha)$.

Caso necessário, pesquise no caderno para encontrar a definição de cada distribuição.

9. [2, Exercício 3.19] Considere duas variáveis aleatórias X e Y distribuídas conjuntamente de acordo com a função densidade de probabilidade

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(3 - y), & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante k.

(b) Determine e esboce as densidades marginais de X e Y.

(c) São X e Y independentes?

(d) Calcule $\Pr[Y > X]$.

10. [1, Exercício 5.2] Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e Y uma outra variável aleatória que depende de X através da relação $Y = X(1-X)$. Determine a média, o valor quadrático médio e a variância de Y.

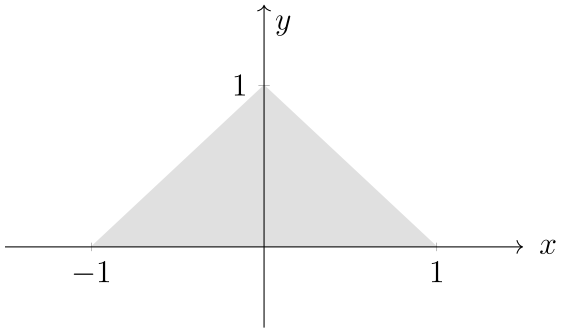
11. [1, Exercício 5.4] Um sinal de trânsito permanece, alternadamente, 30 segundos aberto e 30 segundos fechado. Seja X a variável aleatória que caracteriza o tempo de espera de um motorista que passe por este sinal, em segundos.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

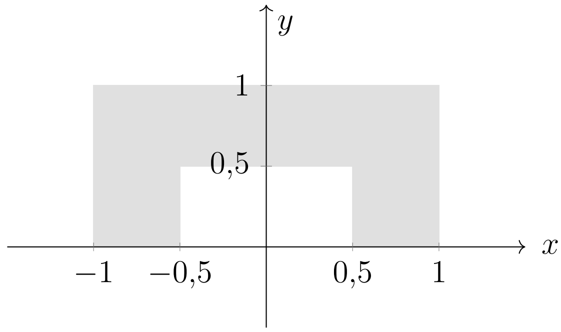
(b) Determine e esboce a função distribuição acumulada de X.

(c) Determine o tempo de espera médio.

12. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada da figura.



(I)



(II)

Para cada caso:

(a) Determine $\Pr[Y > 1/2 \mid |X| \leq 1/2]$.

(b) Determine e esboce as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y.

(c) Determine e esboce as funções de distribuição acumuladas marginais de X e de Y.

(d) Determine a função densidade de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$. Esboce a função densidade de probabilidade obtida, em função de x, para $y = 1/4$ e $y = 3/4$.

(e) Determine a função densidade de probabilidade condicional $f_{X|A}(x)$, onde A é o evento definido por $A = \{0{,}4 \leq Y \leq 0{,}6\}$.

13. [2, Exercício 3.3.17] Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde k é uma constante real. Determine $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{E}[X \mid Y = 1]$ e $\mathrm{E}[Y \mid X = 0]$.

14. [3, Example 9.4] Considere duas variáveis aleatórias discretas X_1 e X_2 distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

X_1 \ X_2	-8	0	2	6
-8	0	$1/4$	0	0
0	$1/4$	0	0	0
2	0	0	0	$1/4$
6	0	0	$1/4$	0

Seja $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2]^{\mathrm{T}}$. Determine o vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}}$ e a matriz covariância $K_{\vec{X}}$.

15. Seja $\vec{X} = [X \;\; Y]^{\mathrm{T}}$ um vetor aleatório com função densidade de probabilidade dada por

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} k, & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{I}$$

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} k(x + y), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{II}$$

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{III}$$

onde k é uma constante positiva. Para cada caso:

(a) Determine o valor de k.

(b) Determine o vetor média de $\vec{X}$.

(c) Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

Extra

1. [1, Exercício 5.5] Considere uma variável aleatória U uniformemente distribuída em $[-1, 1]$. Considere ainda duas variáveis aleatórias X e Y, definidas por $X = U^2$ e $Y = U^3$.

(a) Mostre que X e Y são descorrelacionadas.

(b) Mostre que $\mathrm{E}[X^2 Y^2] \neq \mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2]$ e conclua que X e Y não são independentes.

2. A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida como

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

onde $\mu_X = \mathrm{E}[X]$ e $\mu_Y = \mathrm{E}[Y]$.

(a) Mostre que $\operatorname{cov}[X, Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.

(b) Mostre que $\operatorname{var}[X + Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X, Y]$.

(c) Mostre que a covariância é *bilinear*, isto é, é linear em ambos os argumentos:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha \operatorname{cov}[X, Z] + \beta \operatorname{cov}[Y, Z], \\ \operatorname{cov}[X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha \operatorname{cov}[X, Y] + \beta \operatorname{cov}[X, Z], \end{aligned}$$

onde α e β são constantes e X, Y, Z são variáveis aleatórias. (É necessário apenas mostrar a primeira linha; a segunda linha segue de modo similar.)

(d) Utilize o item anterior para mostrar que, se $Y = aX + b$, onde a e b são constantes, então o coeficiente de correlação

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{var}[X]\,\mathrm{var}[Y]}}$$

vale $+1$ ou -1.

Referências

[1] J. P. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos.* Editora Interciência, 2008.

[2] P. L. O. Costa Neto and M. Cymbalista, *Probabilidades*, 2nd ed. Editora Edgard Blücher, 2006.

[3] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®.* Springer, 2006.

[4] L. A. Peternelli, *Estatística I: Notas de Aula.* Universidade Federal de Viçosa, 2001.

Respostas dos exercícios

1. (a) $h = \frac{2}{a}$. (b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x^2}{a^2}, & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ 1, & \text{se } x > a. \end{cases}$ (c) $\frac{1}{4}$. (d) $\frac{2a}{3}$ e $\frac{a^2}{18}$.

2. (a) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$ (b) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. (c) $\frac{3}{4}$.

3. $p_X(x) = (x-1)(1-p)^{x-2}p^2$, $x = 1, 2, \ldots$.

4. (a) $p_X(0) = 0{,}50$, $p_X(1) = 0{,}20$, $p_X(2) = 0{,}30$.
$p_Y(0) = 0{,}20$, $p_Y(1) = 0{,}40$, $p_Y(2) = 0{,}40$.

(b) $p_{X+Y}(0) = 0{,}10$, $p_{X+Y}(1) = 0{,}24$, $p_{X+Y}(2) = 0{,}34$, $p_{X+Y}(3) = 0{,}20$, $p_{X+Y}(4) = 0{,}12$.
$p_{XY}(0) = 0{,}60$, $p_{XY}(1) = 0{,}08$, $p_{XY}(2) = 0{,}20$, $p_{XY}(3) = 0$, $p_{XY}(4) = 0{,}12$.

(c) Sim.

(d) $p_{X|Y=0}(0) = 0{,}50$, $p_{X|Y=0}(1) = 0{,}20$, $p_{X|Y=0}(2) = 0{,}30$.
$p_{Y|X=1}(0) = 0{,}20$, $p_{Y|X=1}(1) = 0{,}40$, $p_{Y|X=1}(2) = 0{,}40$.

(e) 0,30 e 0,70.

5. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(b-a)}, & \text{se } a < |x| < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

6. (a) $p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ 3/8, & \text{se } (x,y) = (1,0), \\ 3/8, & \text{se } (x,y) = (2,0), \\ 1/8, & \text{se } (x,y) = (3,1). \end{cases}$ (b) $p_X(x) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } x = 0, \\ 3/8, & \text{se } x = 1, \\ 3/8, & \text{se } x = 2, \\ 1/8, & \text{se } x = 3. \end{cases}$ $p_Y(y) = \begin{cases} 7/8, & \text{se } y = 0, \\ 1/8, & \text{se } y = 1. \end{cases}$

(c) $\dfrac{3}{16}$. (d) X e Y são correlacionadas e dependentes.

7. (a) $f_X(x) = \dfrac{1}{6}\delta(x+1) + \dfrac{1}{3}\delta(x) + \dfrac{1}{6}\delta(x-1) + \dfrac{1}{12}[-2 \leq x \leq 2]$. (b) $\dfrac{1}{4}$. (c) $\dfrac{1}{3}$.

8. (a) p e $p(1-p)$. (b) $\dfrac{a+b}{2}$ e $\dfrac{(b-a)^2}{12}$. (c) $\dfrac{1}{p}$ e $\dfrac{1-p}{p^2}$. (d) $\dfrac{1}{\lambda}$ e $\dfrac{1}{\lambda^2}$. (e) $\sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ e $\dfrac{4-\pi}{2}\sigma^2$. (f) 0 e $\dfrac{2}{\alpha^2}$.

9. (a) $k = \dfrac{1}{16}$. (b) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{se } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3-y}{4}, & \text{se } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(c) Sim. (d) $\dfrac{5}{24}$.

10. $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{30}$ e $\dfrac{1}{180}$.

11. (a) $f_X(x) = \dfrac{1}{2}\delta(x) + \dfrac{1}{60}[0 \leq x \leq 30]$. (b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{60}, & \text{se } 0 \leq x \leq 30, \\ 1, & \text{se } x > 30. \end{cases}$ (c) 7,5 s.

12. (Em breve.)

13. $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X \mid Y = 1] = \dfrac{2}{3}$, $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[Y \mid X = 0] = \dfrac{3}{2}$.

14. $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}$.

15. (I-a) $k = 1$. (I-b) $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 7/12 \\ 7/12 \end{bmatrix}$. (I-c) $K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 11/144 & -1/144 \\ -1/144 & 11/144 \end{bmatrix}$.

(II-a) $k = 2$. (II-b) $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$. (II-c) $K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{bmatrix}$.

(III-a) $k = 2$. (III-b) $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$. (III-c) $K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1/18 & 17/81 \\ 17/81 & 2/9 \end{bmatrix}$.