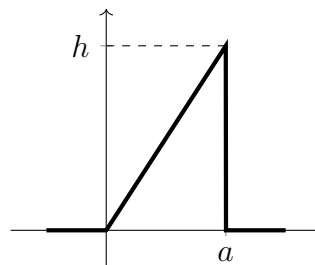


Exercícios

1. Considere uma variável aleatória X cuja função densidade de probabilidade está mostrada abaixo, onde a é uma constante positiva.



- Determine o valor da constante h .
- Determine e esboce a função de distribuição acumulada de X .
- Determine $\Pr[X \leq a/2]$.
- Determine a média e a variância de X .

Suas respostas deve estar em função de a .

2. [2, Exercício 2.4.30] Uma variável aleatória contínua X é definida pela seguinte função densidade de probabilidade:

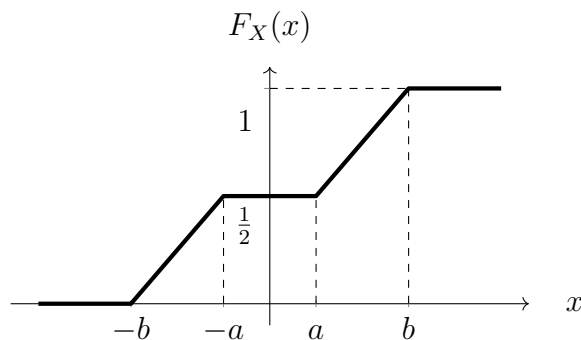
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{x}}, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Determine e esboce a função de distribuição acumulada de X .
- Calcule a probabilidade de X assumir valores maiores que $1/2$.
- Calcule a probabilidade de que, em 4 experimentos independentes, a variável X assumo pelo menos uma vez um valor maior que $1/2$.

3. [3, Problem 4.33] Determine a função massa de probabilidade de uma variável aleatória X que representa o número de experimentos de Bernoulli necessários para alcançar o segundo sucesso.
4. [4] Considere duas variáveis aleatórias discretas X e Y distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,10	0,20	0,20
1	0,04	0,08	0,08
2	0,06	0,12	0,12

- (a) Determine as funções massa de probabilidade marginais de X e Y .
- (b) Determine as funções massa de probabilidade de $X + Y$ e XY .
- (c) São X e Y independentes?
- (d) Determine as PMFs condicionais de X , dado $Y = 0$, e de Y , dado $X = 1$.
- (e) Determine $\Pr[X \geq 1, Y \leq 1]$ e $\Pr[X \leq 1 | Y = 0]$.
5. Considere uma variável aleatória X cuja função de distribuição acumulada está mostrada abaixo, em que a e b são constantes tais que $0 < a < b$.



Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X . Sua resposta deve estar em função de a e b .

6. Sejam B_1, B_2, B_3 três variáveis aleatórias discretas independentes, cada qual distribuída uniformemente sobre o conjunto $\{0, 1\}$. Sejam $X = B_1 + B_2 + B_3$ e $Y = B_1 B_2 B_3$.
- (a) Determine a função massa de probabilidade conjunta de X e Y .
- (b) Determine e esboce as funções massa de probabilidade marginais de X e Y .
- (c) Determine a covariância entre X e Y .
- (d) São X e Y variáveis aleatórias correlacionadas ou descorrelacionadas? São dependentes ou independentes? Justifique.

7. Considere a variável aleatória X definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado.

- Se o resultado for 1, então $X = -1$.
- Se o resultado for 2 ou 3, então $X = 0$.
- Se o resultado for 4, então $X = 1$.
- Se o resultado for 5 ou 6, então $X \sim \text{Unif}(-2, 2)$.

- (a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X .
- (b) Determine $\Pr[1 \leq 2X \leq 3]$.
- (c) Determine $\Pr[X \neq 1 \mid 1 \leq 2X \leq 3]$.

8. Determine a média e a variância das seguintes distribuições de probabilidade.

- (a) $\text{Bern}(p)$. (d) $\text{Exp}(\lambda)$.
- (b) $\text{Unif}(a, b)$. (e) $\text{Rayleigh}(\sigma)$.
- (c) $\text{Geom}(p)$. (f) $\text{Laplace}(\alpha)$.

Caso necessário, pesquise no caderno para encontrar a definição de cada distribuição.

9. [2, Exercício 3.19] Considere duas variáveis aleatórias X e Y distribuídas conjuntamente de acordo com a função densidade de probabilidade

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(3 - y), & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

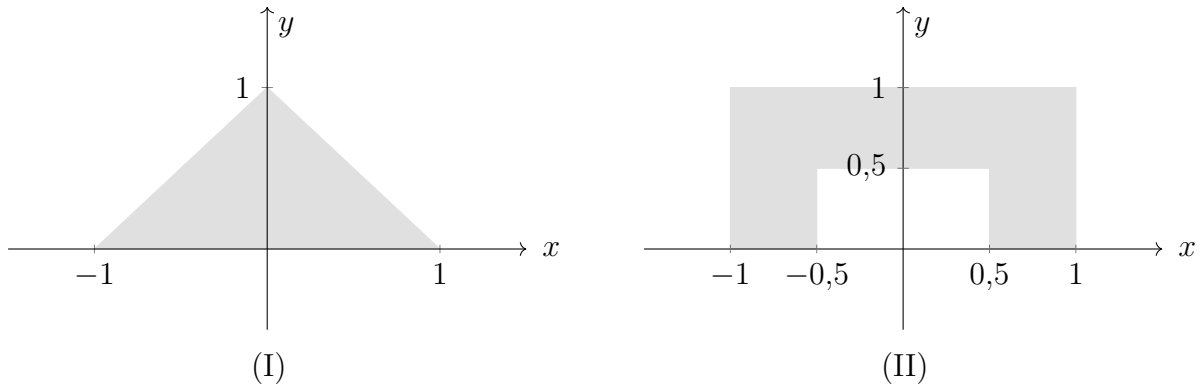
- (a) Determine o valor da constante k .
- (b) Determine e esboce as densidades marginais de X e Y .
- (c) São X e Y independentes?
- (d) Calcule $\Pr[Y > X]$.

10. [1, Exercício 5.2] Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e Y uma outra variável aleatória que depende de X através da relação $Y = X(1 - X)$. Determine a média, o valor quadrático médio e a variância de Y .

11. [1, Exercício 5.4] Um sinal de trânsito permanece, alternadamente, 30 segundos aberto e 30 segundos fechado. Seja X a variável aleatória que caracteriza o tempo de espera de um motorista que passe por este sinal, em segundos.

- (a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X .
- (b) Determine e esboce a função distribuição acumulada de X .
- (c) Determine o tempo de espera médio.

12. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada da figura.



Para cada caso:

- Determine $\Pr[Y > 1/2 \mid |X| \leq 1/2]$.
 - Determine e esboce as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y .
 - Determine e esboce as funções de distribuição acumuladas marginais de X e de Y .
 - Determine a função densidade de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$. Esboce a função densidade de probabilidade obtida, em função de x , para $y = 1/4$ e $y = 3/4$.
 - Determine a função densidade de probabilidade condicional $f_{X|A}(x)$, onde A é o evento definido por $A = \{0,4 \leq Y \leq 0,6\}$.
13. [2, Exercício 3.3.17] Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde k é uma constante real. Determine $E[X]$, $E[Y]$, $E[X \mid Y = 1]$ e $E[Y \mid X = 0]$.

14. [3, Example 9.4] Considere duas variáveis aleatórias discretas X_1 e X_2 distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

$X_1 \backslash X_2$	-8	0	2	6
-8	0	1/4	0	0
0	1/4	0	0	0
2	0	0	0	1/4
6	0	0	1/4	0

Seja $\vec{X} = [X_1 \ X_2]^T$. Determine o vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}}$ e a matriz covariância $K_{\vec{X}}$.

15. Seja $\vec{X} = [X \ Y]^T$ um vetor aleatório com função densidade de probabilidade dada por

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} k, & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} k(x + y), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{III})$$

onde k é uma constante positiva. Para cada caso:

- (a) Determine o valor de k .
- (b) Determine o vetor média de \vec{X} .
- (c) Determine a matriz covariância de \vec{X} .

Extra

1. [1, Exercício 5.5] Considere uma variável aleatória U uniformemente distribuída em $[-1, 1]$. Considere ainda duas variáveis aleatórias X e Y , definidas por $X = U^2$ e $Y = U^3$.

- (a) Mostre que X e Y são descorrelacionadas.
- (b) Mostre que $E[X^2Y^2] \neq E[X^2]E[Y^2]$ e conclua que X e Y não são independentes.

2. A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida como

$$\text{cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

onde $\mu_X = E[X]$ e $\mu_Y = E[Y]$.

- (a) Mostre que $\text{cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$.
- (b) Mostre que $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2\text{cov}[X, Y]$.
- (c) Mostre que a covariância é *bilinear*, isto é, é linear em ambos os argumentos:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha \text{cov}[X, Z] + \beta \text{cov}[Y, Z], \\ \text{cov}[X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha \text{cov}[X, Y] + \beta \text{cov}[X, Z], \end{aligned}$$

onde α e β são constantes e X, Y, Z são variáveis aleatórias. (É necessário apenas mostrar a primeira linha; a segunda linha segue de modo similar.)

- (d) Utilize o item anterior para mostrar que, se $Y = aX + b$, onde a e b são constantes, então o coeficiente de correlação

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}}$$

vale $+1$ ou -1 .

Referências

- [1] J. P. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*. Editora Interciência, 2008.
- [2] P. L. O. Costa Neto and M. Cymbalista, *Probabilidades*, 2nd ed. Editora Edgard Blücher, 2006.
- [3] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB[®]*. Springer, 2006.
- [4] L. A. Peternelli, *Estatística I: Notas de Aula*. Universidade Federal de Viçosa, 2001.

Respostas dos exercícios

1. (a) $h = \frac{2}{a}$. (b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x^2}{a^2}, & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ 1, & \text{se } x > a. \end{cases}$ (c) $\frac{1}{4}$. (d) $\frac{2a}{3}$ e $\frac{a^2}{18}$.

2. (a) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$ (b) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. (c) $\frac{3}{4}$.

3. $p_X(x) = (x-1)(1-p)^{x-2}p^2$, $x = 1, 2, \dots$

4. (a) $p_X(0) = 0,50$, $p_X(1) = 0,20$, $p_X(2) = 0,30$.
 $p_Y(0) = 0,20$, $p_Y(1) = 0,40$, $p_Y(2) = 0,40$.

(b) $p_{X+Y}(0) = 0,10$, $p_{X+Y}(1) = 0,24$, $p_{X+Y}(2) = 0,34$, $p_{X+Y}(3) = 0,20$, $p_{X+Y}(4) = 0,12$.
 $p_{XY}(0) = 0,60$, $p_{XY}(1) = 0,08$, $p_{XY}(2) = 0,20$, $p_{XY}(3) = 0$, $p_{XY}(4) = 0,12$.

(c) Sim.

(d) $p_{X|Y=0}(0) = 0,50$, $p_{X|Y=0}(1) = 0,20$, $p_{X|Y=0}(2) = 0,30$.
 $p_{Y|X=1}(0) = 0,20$, $p_{Y|X=1}(1) = 0,40$, $p_{Y|X=1}(2) = 0,40$.

(e) $0,30$ e $0,70$.

5. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(b-a)}, & \text{se } a < |x| < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$6. (a) p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ 3/8, & \text{se } (x,y) = (1,0), \\ 3/8, & \text{se } (x,y) = (2,0), \\ 1/8, & \text{se } (x,y) = (4,1). \end{cases} \quad (b) p_X(x) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } x = 0, \\ 3/8, & \text{se } x = 1, \\ 3/8, & \text{se } x = 2, \\ 1/8, & \text{se } x = 4. \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 7/8, & \text{se } y = 0, \\ 1/8, & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

(c) $\frac{3}{16}$. (d) X e Y são correlacionadas e dependentes.

7. (a) $f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x+1) + \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{12}[-2 \leq x \leq 2]$. (b) $\frac{1}{4}$. (c) $\frac{1}{3}$.

8. (a) p e $p(1-p)$. (b) $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{(b-a)^2}{12}$. (c) $\frac{1}{p}$ e $\frac{1-p}{p^2}$. (d) $\frac{1}{\lambda}$ e $\frac{1}{\lambda^2}$. (e) $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e $\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$. (f) 0 e $\frac{2}{\alpha^2}$.

9. (a) $k = \frac{1}{16}$. (b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3-y}{4}, & \text{se } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(c) Sim. (d) $\frac{5}{24}$.

10. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$ e $\frac{1}{180}$.

11. (a) $f_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{60}[0 \leq x \leq 30]$. (b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{60}, & \text{se } 0 \leq x \leq 30, \\ 1, & \text{se } x > 30. \end{cases}$ (c) 7,5 s.

12. (Em breve.)

13. $E[X] = E[X | Y = 1] = \frac{2}{3}$, $E[Y] = E[Y | X = 0] = \frac{3}{2}$.

14. $\vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}$.

15. (I-a) $k = 1$. (I-b) $\vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 7/12 \\ 7/12 \end{bmatrix}$. (I-c) $K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 11/144 & -1/144 \\ -1/144 & 11/144 \end{bmatrix}$.

(II-a) $k = 2$. (II-b) $\vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$. (II-c) $K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{bmatrix}$.

(III-a) $k = 2$. (III-b) $\vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$. (III-c) $K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 1/18 & 17/81 \\ 17/81 & 2/9 \end{bmatrix}$.