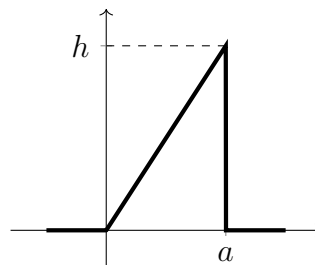


## Exercícios

1. Considere uma variável aleatória  $X$  cuja função densidade de probabilidade está mostrada abaixo, onde  $a$  é uma constante positiva.



- Determine o valor da constante  $h$ .
- Determine e esboce a função de distribuição acumulada de  $X$ .
- Determine  $\Pr[X \leq a/2]$ .
- Determine a média e a variância de  $X$ .

Suas respostas deve estar em função de  $a$ .

2. [2, Exercício 2.4.30] Uma variável aleatória contínua  $X$  é definida pela seguinte função densidade de probabilidade:

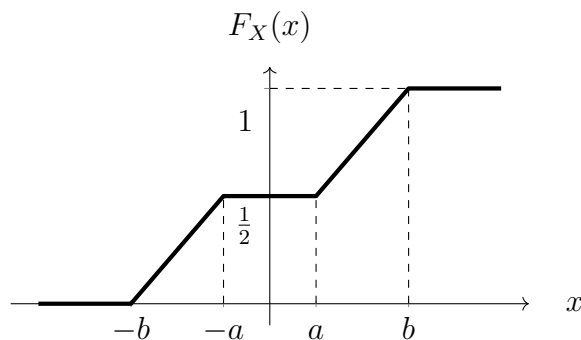
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{x}}, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Determine e esboce a função de distribuição acumulada de  $X$ .
- Calcule a probabilidade de  $X$  assumir valores maiores que  $1/2$ .
- Calcule a probabilidade de que, em 4 experimentos independentes, a variável  $X$  assumo pelo menos uma vez um valor maior que  $1/2$ .

3. [3, Problem 4.33] Determine a função massa de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  que representa o número de experimentos de Bernoulli necessários para alcançar o segundo sucesso.
4. [4] Considere duas variáveis aleatórias discretas  $X$  e  $Y$  distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,10	0,20	0,20
1	0,04	0,08	0,08
2	0,06	0,12	0,12

- (a) Determine as funções massa de probabilidade marginais de  $X$  e  $Y$ .
- (b) Determine as funções massa de probabilidade de  $X + Y$  e  $XY$ .
- (c) São  $X$  e  $Y$  independentes?
- (d) Determine as PMFs condicionais de  $X$ , dado  $Y = 0$ , e de  $Y$ , dado  $X = 1$ .
- (e) Determine  $\Pr[X \geq 1, Y \leq 1]$  e  $\Pr[X \leq 1 | Y = 0]$ .
5. Considere uma variável aleatória  $X$  cuja função de distribuição acumulada está mostrada abaixo, em que  $a$  e  $b$  são constantes tais que  $0 < a < b$ .



Determine e esboce a função densidade de probabilidade de  $X$ . Sua resposta deve estar em função de  $a$  e  $b$ .

6. Sejam  $B_1, B_2, B_3$  três variáveis aleatórias discretas independentes, cada qual distribuída uniformemente sobre o conjunto  $\{0, 1\}$ . Sejam  $X = B_1 + B_2 + B_3$  e  $Y = B_1 B_2 B_3$ .
- (a) Determine a função massa de probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$ .
- (b) Determine e esboce as funções massa de probabilidade marginais de  $X$  e  $Y$ .
- (c) Determine a covariância entre  $X$  e  $Y$ .
- (d) São  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias correlacionadas ou descorrelacionadas? São dependentes ou independentes? Justifique.

7. Considere a variável aleatória  $X$  definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado.

- Se o resultado for 1, então  $X = -1$ .
- Se o resultado for 2 ou 3, então  $X = 0$ .
- Se o resultado for 4, então  $X = 1$ .
- Se o resultado for 5 ou 6, então  $X \sim \text{Unif}(-2, 2)$ .

- (a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de  $X$ .
- (b) Determine  $\Pr[1 \leq 2X \leq 3]$ .
- (c) Determine  $\Pr[X \neq 1 \mid 1 \leq 2X \leq 3]$ .

8. Determine a média e a variância das seguintes distribuições de probabilidade.

- (a)  $\text{Bern}(p)$ . (d)  $\text{Exp}(\lambda)$ .
- (b)  $\text{Unif}(a, b)$ . (e)  $\text{Rayleigh}(\sigma)$ .
- (c)  $\text{Geom}(p)$ . (f)  $\text{Laplace}(\alpha)$ .

Caso necessário, pesquise no caderno para encontrar a definição de cada distribuição.

9. [2, Exercício 3.19] Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  distribuídas conjuntamente de acordo com a função densidade de probabilidade

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(3 - y), & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

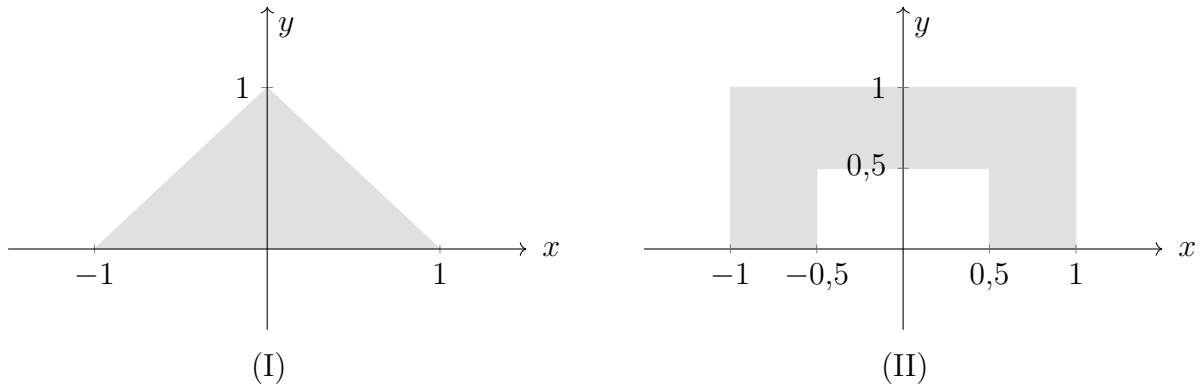
- (a) Determine o valor da constante  $k$ .
- (b) Determine e esboce as densidades marginais de  $X$  e  $Y$ .
- (c) São  $X$  e  $Y$  independentes?
- (d) Calcule  $\Pr[Y > X]$ .

10. [1, Exercício 5.2] Seja  $X$  uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  e  $Y$  uma outra variável aleatória que depende de  $X$  através da relação  $Y = X(1 - X)$ . Determine a média, o valor médio quadrático e a variância de  $Y$ .

11. [1, Exercício 5.4] Um sinal de trânsito permanece, alternadamente, 30 segundos aberto e 30 segundos fechado. Seja  $X$  a variável aleatória que caracteriza o tempo de espera de um motorista que passe por este sinal, em segundos.

- (a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de  $X$ .
- (b) Determine e esboce a função distribuição acumulada de  $X$ .
- (c) Determine o tempo de espera médio.

12. Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com função densidade de probabilidade conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada da figura.



Para cada caso:

- Determine  $\Pr[Y > 1/2 \mid |X| \leq 1/2]$ .
  - Determine e esboce as funções densidade de probabilidade marginais de  $X$  e de  $Y$ .
  - Determine e esboce as funções de distribuição acumuladas marginais de  $X$  e de  $Y$ .
  - Determine a função densidade de probabilidade condicional de  $X$  dado que  $Y = y$ . Esboce a função densidade de probabilidade obtida, em função de  $x$ , para  $y = 1/4$  e  $y = 3/4$ .
  - Determine a função densidade de probabilidade condicional  $f_{X|A}(x)$ , onde  $A$  é o evento definido por  $A = \{0,4 \leq Y \leq 0,6\}$ .
13. [2, Exercício 3.3.17] Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante real. Determine  $E[X]$ ,  $E[Y]$ ,  $E[X \mid Y = 1]$  e  $E[Y \mid X = 0]$ .

14. [3, Example 9.4] Considere duas variáveis aleatórias discretas  $X_1$  e  $X_2$  distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

$X_1 \backslash X_2$	-8	0	2	6
-8	0	1/4	0	0
0	1/4	0	0	0
2	0	0	0	1/4
6	0	0	1/4	0

Seja  $\vec{X} = [X_1 \ X_2]^T$ . Determine o vetor média  $\vec{\mu}_{\vec{X}}$  e a matriz covariância  $K_{\vec{X}}$ .

15. Seja  $\vec{X} = [X \ Y]^T$  um vetor aleatório com função densidade de probabilidade dada por

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} k, & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} k(x + y), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{III})$$

onde  $k$  é uma constante positiva. Para cada caso:

- Determine o valor de  $k$ .
- Determine o vetor média de  $\vec{X}$ .
- Determine a matriz covariância de  $\vec{X}$ .

## Extra

1. [1, Exercício 5.5] Considere uma variável aleatória  $U$  uniformemente distribuída em  $[-1, 1]$ . Considere ainda duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , definidas por  $X = U^2$  e  $Y = U^3$ .

- Mostre que  $X$  e  $Y$  são descorrelacionadas.
- Mostre que  $E[X^2Y^2] \neq E[X^2]E[Y^2]$  e conclua que  $X$  e  $Y$  não são independentes.

2. A covariância entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é definida como

$$\text{cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

onde  $\mu_X = E[X]$  e  $\mu_Y = E[Y]$ .

- Mostre que  $\text{cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ .
- Mostre que  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2\text{cov}[X, Y]$ .
- Mostre que a covariância é *bilinear*, isto é, é linear em ambos os argumentos:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha \text{cov}[X, Z] + \beta \text{cov}[Y, Z], \\ \text{cov}[X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha \text{cov}[X, Y] + \beta \text{cov}[X, Z], \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes e  $X, Y, Z$  são variáveis aleatórias. (É necessário apenas mostrar a primeira linha; a segunda linha segue de modo similar.)

- (d) Utilize o item anterior para mostrar que, se  $Y = aX + b$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes, então o coeficiente de correlação

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}}$$

vale  $+1$  ou  $-1$ .

## Referências

- [1] J. P. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*. Editora Interciência, 2008.
- [2] P. L. O. Costa Neto and M. Cymbalista, *Probabilidades*, 2nd ed. Editora Edgard Blücher, 2006.
- [3] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®*. Springer, 2006.
- [4] L. A. Peternelli, *Estatística I: Notas de Aula*. Universidade Federal de Viçosa, 2001.

## Respostas dos exercícios

1. (a)  $h = \frac{2}{a}$ . (b)  $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x^2}{a^2}, & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ 1, & \text{se } x > a. \end{cases}$  (c)  $\frac{1}{4}$ . (d)  $\frac{2a}{3}$  e  $\frac{a^2}{18}$ .

2. (a)  $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$  (b)  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . (c)  $\frac{3}{4}$ .

3.  $p_X(x) = (x-1)(1-p)^{x-2}p^2$ ,  $x = 1, 2, \dots$

4. (a)  $p_X(0) = 0,50$ ,  $p_X(1) = 0,20$ ,  $p_X(2) = 0,30$ .  
 $p_Y(0) = 0,20$ ,  $p_Y(1) = 0,40$ ,  $p_Y(2) = 0,40$ .

(b)  $p_{X+Y}(0) = 0,10$ ,  $p_{X+Y}(1) = 0,24$ ,  $p_{X+Y}(2) = 0,34$ ,  $p_{X+Y}(3) = 0,20$ ,  $p_{X+Y}(4) = 0,12$ .  
 $p_{XY}(0) = 0,60$ ,  $p_{XY}(1) = 0,08$ ,  $p_{XY}(2) = 0,20$ ,  $p_{XY}(3) = 0$ ,  $p_{XY}(4) = 0,12$ .

(c) Sim.

(d)  $p_{X|Y=0}(0) = 0,50$ ,  $p_{X|Y=0}(1) = 0,20$ ,  $p_{X|Y=0}(2) = 0,30$ .  
 $p_{Y|X=1}(0) = 0,20$ ,  $p_{Y|X=1}(1) = 0,40$ ,  $p_{Y|X=1}(2) = 0,40$ .

(e)  $0,30$  e  $0,70$ .

5.  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(b-a)}, & \text{se } a < |x| < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$6. \text{ (a) } p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ 3/8, & \text{se } (x,y) = (1,0), \\ 3/8, & \text{se } (x,y) = (2,0), \\ 1/8, & \text{se } (x,y) = (4,1). \end{cases} \quad \text{(b) } p_X(x) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } x = 0, \\ 3/8, & \text{se } x = 1, \\ 3/8, & \text{se } x = 2, \\ 1/8, & \text{se } x = 4. \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 7/8, & \text{se } y = 0, \\ 1/8, & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

(c)  $\frac{3}{16}$ . (d)  $X$  e  $Y$  são correlacionadas e dependentes.

$$7. \text{ (a) } f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x+1) + \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{12}[-2 \leq x \leq 2]. \quad \text{(b) } \frac{1}{4}. \quad \text{(c) } \frac{1}{3}.$$

$$8. \text{ (a) } p \text{ e } p(1-p). \text{ (b) } \frac{a+b}{2} \text{ e } \frac{(b-a)^2}{12}. \text{ (c) } \frac{1}{p} \text{ e } \frac{1-p}{p^2}. \text{ (d) } \frac{1}{\lambda} \text{ e } \frac{1}{\lambda^2}. \text{ (e) } \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ e } \frac{4-\pi}{2}\sigma^2. \text{ (f) } 0 \text{ e } \frac{2}{\alpha^2}.$$

$$9. \text{ (a) } k = \frac{1}{16}. \quad \text{(b) } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3-y}{4}, & \text{se } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(c) Sim. (d)  $\frac{5}{24}$ .

$$10. \frac{1}{6}, \frac{1}{30} \text{ e } \frac{1}{180}.$$

$$11. \text{ (a) } f_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{60}[0 \leq x \leq 30]. \quad \text{(b) } F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{60}, & \text{se } 0 \leq x \leq 30, \\ 1, & \text{se } x > 30. \end{cases} \quad \text{(c) } 7,5 \text{ s.}$$

12. (Em breve.)

$$13. E[X] = E[X | Y = 1] = \frac{2}{3}, \quad E[Y] = E[Y | X = 0] = \frac{3}{2}.$$

$$14. \vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}.$$

$$15. \text{ (I-a) } k = 1. \quad \text{(I-b) } \vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 7/12 \\ 7/12 \end{bmatrix}. \quad \text{(I-c) } K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 11/144 & -1/144 \\ -1/144 & 11/144 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(II-a) } k = 2. \quad \text{(II-b) } \vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}. \quad \text{(II-c) } K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(III-a) } k = 2. \quad \text{(III-b) } \vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}. \quad \text{(III-c) } K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 1/18 & 17/81 \\ 17/81 & 2/9 \end{bmatrix}.$$