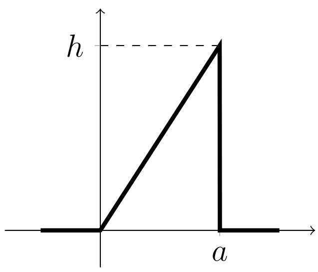
INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
COORDENADORIA DE ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

PRE29006 **LISTA DE EXERCÍCIOS #1** **2016.1**

Exercícios

1. Considere uma variável aleatória X cuja função densidade de probabilidade está mostrada abaixo.



(a) Determine o valor da constante h em função da constante a.

(b) Determine e esboce a função de distribuição acumulada de X.

(c) Determine $\Pr[X \leq a/2]$.

2. [2, Exercício 2.4.30] Uma variável aleatória contínua X é definida pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{x}}, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine e esboce a função de distribuição acumulada de X.

(b) Calcule a probabilidade de X assumir valores maiores que $1/2$.

(c) Calcule a probabilidade de que, em 4 experimentos independentes, a variável X assuma pelo menos uma vez um valor maior que $1/2$.

3. [3, Problem 4.33] Determine a função massa de probabilidade de uma variável aleatória X que representa o número de experimentos de Bernoulli necessários para alcançar o segundo sucesso. Desafio: Generalize para o n-ésimo sucesso.

4. [4] Considere duas variáveis aleatórias discretas X e Y distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

X \ Y	0	1	2
0	0,10	0,20	0,20
1	0,04	0,08	0,08
2	0,06	0,12	0,12

(a) Determine as funções massa de probabilidade marginais de X e Y.

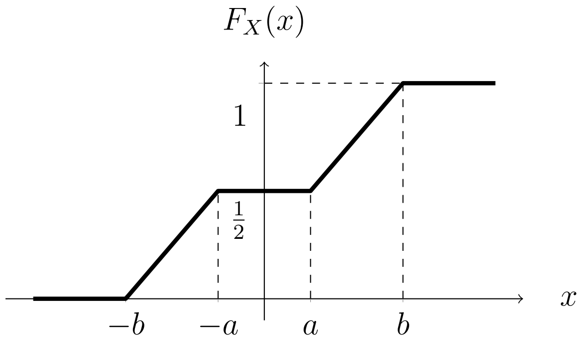
(b) Determine as funções massa de probabilidade de $X + Y$ e XY.

(c) São X e Y independentes?

(d) Determine as funções massa de probabilidade condicionais de X, dado $Y = 0$, e de Y, dado $X = 1$.

(e) Determine $\Pr[X \geq 1, Y \leq 1]$ e $\Pr[X \leq 1 \mid Y = 0]$.

5. Considere uma variável aleatória X cuja função de distribuição acumulada está mostrada abaixo, em que a e b são constantes tais que $0 < a < b$.



Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X. Sua resposta deve estar em função de a e b.

6. Seja U uma variável aleatória contínua distribuída uniformemente no intervalo $[0, 4]$. Seja X uma outra variável aleatória, que depende de U da seguinte maneira:

- Dado que $0 \leq U \leq 1$, então X é distribuída uniformemente no intervalo $[0, 2]$.
- Caso contrário, tem-se $X = 3$.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

(b) Determine e esboce a função de distribuição acumulada de X.

(c) Determine $\Pr[X \leq 1]$, $\Pr[X \leq 3]$ e $\Pr[1 \leq X \leq 3]$.

7. Sejam B_1, B_2, B_3 três variáveis aleatórias discretas independentes, cada qual distribuída uniformemente sobre o conjunto $\{0, 1\}$. Sejam $X = B_1 + B_2 + B_3$ e $Y = B_1 B_2 B_3$.

(a) Determine a função massa de probabilidade conjunta de X e Y.

(b) Determine e esboce as funções massa de probabilidade marginais de X e Y.

(c) São X e Y variáveis aleatórias dependentes ou independentes? Justifique.

8. Considere a variável aleatória X definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado.

- Se o resultado for 1, então $X = -1$.
- Se o resultado for 2 ou 3, então $X = 0$.
- Se o resultado for 4, então $X = 1$.
- Se o resultado for 5 ou 6, então $X \sim \mathrm{Unif}(-2, 2)$.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

(b) Determine $\Pr[1 \leq 2X \leq 3]$.

(c) Determine $\Pr[X \neq 1 \mid 1 \leq 2X \leq 3]$.

9. O tempo de espera X, em minutos, de um usuário em um sistema de filas é zero, se ele encontra o sistema livre, ou exponencialmente distribuído, se ele encontra o sistema ocupado—mais precisamente,

$$f_{X|\text{ocupado}}(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{u}(x).$$

As probabilidades de ele encontrar o sistema livre ou ocupado são de 25 % e 75 %, respectivamente.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

(b) Determine a probabilidade de o usuário esperar mais do que 1 minuto.

10. [1, Exercício 3.8] Considere a função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine a função densidade de probabilidade condicional $f_{X|Y=y}(x)$.

(b) Verifique se X e Y são ou não variáveis aleatórias estatisticamente independentes.

(c) Calcule a probabilidade de X ser positivo sendo dado que Y é positivo.

(d) Calcule a probabilidade de X ser maior que Y.

11. [2, Exercício 3.19] Considere duas variáveis aleatórias X e Y distribuídas conjuntamente de acordo com a função densidade de probabilidade

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(3-y), & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

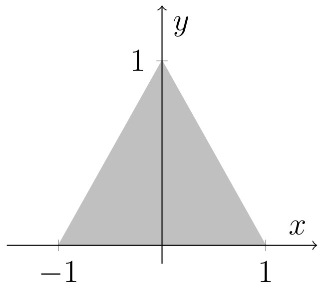
(a) Determine o valor da constante k.

(b) Determine e esboce as densidades marginais de X e Y.

(c) São X e Y independentes?

(d) Calcule $\Pr[Y > X]$.

12. [1, Exercício 3.9] Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo.



(a) Determine a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y.

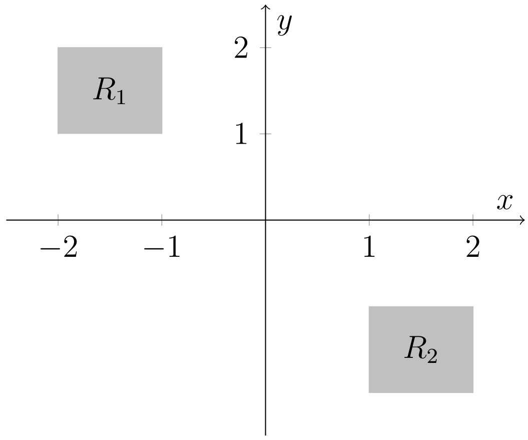
(b) Determine e esboce a funções densidade de probabilidade marginais de X e Y.

(c) Determine $\Pr[Y > 1/2 \mid |X| \leq 1/2]$.

13. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & \text{se } (x,y) \in R_1, \\ 2k, & \text{se } (x,y) \in R_2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde k é uma constante positiva e R_1 e R_2 são as regiões sombreadas da figura abaixo.



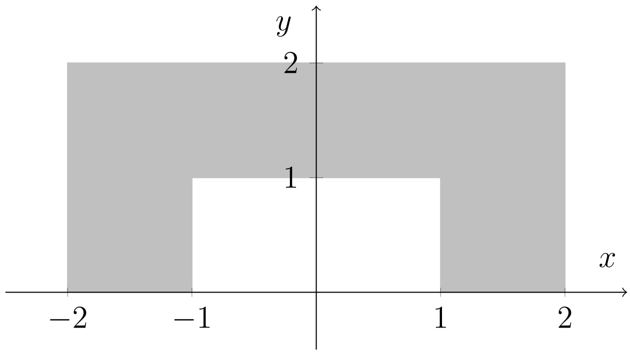
(a) Determine o valor da constante k.

(b) Determine e esboce as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y.

(c) Determine e esboce as funções de distribuição acumuladas de X e de Y.

(d) Determine a função densidade de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$. Esboce a função densidade de probabilidade obtida, em função de x, para $y = 3/2$ e $y = -3/2$.

14. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ constante e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo.



(a) Determine e esboce as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y.

(b) Determine e esboce as funções de distribuição acumuladas marginais de X e de Y.

(c) Determine a função densidade de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$. Esboce a função densidade de probabilidade obtida, em função de x, para $y = 1/2$ e $y = 3/2$.

15. [1, Exercício 3.12] Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja X a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e Y a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra.

(a) Determine as funções densidade de probabilidade marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e as funções densidade de probabilidade condicionais $f_{X|Y=y}(x)$ e $f_{Y|X=x}(y)$.

(b) Calcule a probabilidade de que um triângulo possa ser formado com as três peças obtidas. (Lembre-se de que, num triângulo, o comprimento de qualquer um dos lados é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.)

Referências

[1] J. P. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos.* Editora Interciência, 2008.

[2] P. L. O. Costa Neto and M. Cymbalista, *Probabilidades*, 2nd ed. Editora Edgard Blücher, 2006.

[3] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®.* Springer, 2006.

[4] L. A. Peternelli, *Estatística I: Notas de Aula.* Universidade Federal de Viçosa, 2001.

Respostas

1. (a) $h = \dfrac{2}{a}$. (b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}, & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ 1, & \text{se } x > a. \end{cases}$ (c) $\dfrac{1}{4}$.

2. (a) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$ (b) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (c) $\dfrac{3}{4}$.

3. $p_X(x) = (x-1)(1-p)^{x-2}p^2$, $x = 1, 2, \ldots$. $p_X(x) = \dbinom{x-1}{n-1}(1-p)^{x-n}p^n$, $x = 1, 2, \ldots$.

4. (a) $p_X(0) = 0{,}50$, $p_X(1) = 0{,}20$, $p_X(2) = 0{,}30$.
$p_Y(0) = 0{,}20$, $p_Y(1) = 0{,}40$, $p_Y(2) = 0{,}40$.

(b) $p_{X+Y}(0) = 0{,}10$, $p_{X+Y}(1) = 0{,}24$, $p_{X+Y}(2) = 0{,}34$, $p_{X+Y}(3) = 0{,}20$, $p_{X+Y}(4) = 0{,}12$.
$p_{XY}(0) = 0{,}60$, $p_{XY}(1) = 0{,}08$, $p_{XY}(2) = 0{,}20$, $p_{XY}(3) = 0$, $p_{XY}(4) = 0{,}12$.

(c) Sim.

(d) $p_{X|Y=0}(0) = 0{,}50$, $p_{X|Y=0}(1) = 0{,}20$, $p_{X|Y=0}(2) = 0{,}30$.
$p_{Y|X=1}(0) = 0{,}20$, $p_{Y|X=1}(1) = 0{,}40$, $p_{Y|X=1}(2) = 0{,}40$.

(e) 0,30 e 0,70.

5. $f_X(x) = \begin{cases} 2/(b-a), & \text{se } a < |x| < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

6. (a) $f_X(x) = \dfrac{1}{8}1[0 \leq x \leq 2] + \dfrac{3}{4}\delta(x)$. (b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ x/8, & \text{se } 0 \leq x < 2, \\ 1/4, & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$ (c) $\dfrac{1}{8}$, 1, $\dfrac{7}{8}$.

7. (a) $p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ 3/8, & \text{se } (x,y) = (1,0), \\ 3/8, & \text{se } (x,y) = (2,0), \\ 1/8, & \text{se } (x,y) = (4,1). \end{cases}$ (b) $p_X(x) = \begin{cases} 1/8, & \text{se } x = 0, \\ 3/8, & \text{se } x = 1, \\ 3/8, & \text{se } x = 2, \\ 1/8, & \text{se } x = 4. \end{cases}$ $p_Y(y) = \begin{cases} 7/8, & \text{se } y = 0, \\ 1/8, & \text{se } y = 1. \end{cases}$

(c) $\dfrac{3}{16}$. (d) X e Y são dependentes.

8. (a) $f_X(x) = \dfrac{1}{6}\delta(x+1) + \dfrac{1}{3}\delta(x) + \dfrac{1}{6}\delta(x-1) + \dfrac{1}{12}1[-2 \leq x \leq 2]$. (b) $\dfrac{1}{4}$. (c) $\dfrac{1}{3}$.

9. (a) $f_X(x) = \dfrac{1}{4}\delta(x) + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{u}(x)$. (b) $\dfrac{3}{4\mathrm{e}} \approx 0{,}276$.

10. (a) $f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & \text{se } |x| \le \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ (definido apenas para $|y| \le 1$)

(b) X e Y são dependentes. (c) $\dfrac{1}{2}$. (d) $\dfrac{1}{2}$.

11. (a) $k = \dfrac{1}{16}$. (b) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{se } 0 \le x \le 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3-y}{4}, & \text{se } 0 \le y \le 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(c) Sim. (d) $\dfrac{5}{24}$.

12. (a) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 1-|x|, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(b) $f_X(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{se } -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{se } 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ (c) $\dfrac{1}{3}$.

13. (a) $k = \dfrac{1}{3}$.

(b) $f_X(x) = \begin{cases} 1/3, & \text{se } -2 \le x \le -1, \\ 2/3, & \text{se } 1 \le x \le 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 2/3, & \text{se } -2 \le y \le -1, \\ 1/3, & \text{se } 1 \le y \le 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ (c) —.

(d) $f_{X|Y=3/2}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -2 \le x \le -1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ $f_{X|Y=-3/2}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 \le x \le 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

14. (a) $f_X(x) = \begin{cases} 1/6, & \text{se } |x| < 1, \\ 1/3, & \text{se } 1 < |x| < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 1/3, & \text{se } 0 < y < 1, \\ 2/3, & \text{se } 1 < y < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ (b) —.

(c) $f_{X|Y=1/2}(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } 1 < |x| < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ $f_{X|Y=3/2}(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{se } |x| < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

15. (a) $f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y, & \text{se } 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x \ln y}, & \text{se } y \le x \le 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ (definido apenas para $0 \le y \le 1$)

$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se } 0 \le y \le x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ (definido apenas para $0 \le x \le 1$)

(b) $\ln 2 - \dfrac{1}{2} \approx 0{,}193$.