INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
COORDENADORIA DE ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

COM29008 **LISTA DE EXERCÍCIOS #2** **2016.1**

Exercícios

1. Verifique se os seguintes códigos binários são lineares, justificando sua resposta. Calcule também a distância mínima de cada código.

(a) $\mathcal{C} = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

(b) $\mathcal{C} = \{000, 001, 100, 101\}$.

(c) $\mathcal{C} = \{000, 100, 110, 111\}$.

(d) $\mathcal{C} = \{001, 100, 101\}$.

2. [2, 15.2-4] Considere a seguinte matriz geradora de um código de bloco $(4, 2)$ binário:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) A matriz geradora está na forma sistemática?

(b) Determine uma matriz de verificação de paridade para o código.

(c) Encontre as palavras-código associadas a todos os possíveis bits de entrada.

(d) Determine a distância mínima do código e o máximo número de bits errados que o código pode garantidamente corrigir.

3. [2, 15.2-5] Considere um código de bloco $(k+1, k)$ binário com codificador sistemático no qual o dígito de paridade é dado por

$$c_{k+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_k.$$

(a) Construa a matriz geradora associada ao codificador em questão.

(b) Determine o código gerado por esta matriz no para $k = 3$.

(c) Determine a capacidade de correção e detecção de erros do código.

(d) Verifique que $cH^{\mathrm{T}} = 0$, para toda palavra-código c e mostre que

$$rH^{\mathrm{T}} = \begin{cases} 0, & \text{caso não ocorra nenhum erro,} \\ 1, & \text{caso ocorra exatamente um erro.} \end{cases}$$

Por simplicidade, assuma $k = 3$.

4. [2, 15.2-9] Considere um código $(6,3)$ binário com codificador sistemático no qual os três primeiros bits da palavras-código correspondem aos bits de mensagem (u_1, u_2, u_3) e os três últimos bits são dados por

$$\begin{aligned} c_4 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ c_5 &= u_1 + u_2, \\ c_6 &= u_1 + u_3. \end{aligned}$$

(a) Construa a matriz geradora associada ao codificador em questão.

(b) Encontre as palavras-código associadas a todos os possíveis bits de entrada.

(c) Determine a capacidade de correção e detecção de erros do código.

(d) Prepare uma tabela de decodificação síndrome $\rightarrow$ padrão de erro.

(e) Decodifique as seguintes palavras recebidas: 101100, 000110, 101010.

5. [2, 15.2-14] Considere um código de bloco $(6,2)$ binário gerado pela matriz

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine todas as palavras-código.

(b) Prepare uma tabela de decodificação síndrome $\rightarrow$ padrão de erro. *Dica:* Este código pode corrigir todos os padrões de erro de peso 1, sete padrões de erro de peso 2 e dois padrões de erro de peso 3. Escolha adequadamente os padrões de erro de peso 2 e 3.

6. Determine todas as palavras-código do código de bloco binário com a seguinte matriz de verificação de paridade:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a taxa do código?

7. Considere um código de bloco binário com a seguinte matriz de verificação de paridade:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique se os vetores 11110000 e 00011000 são palavras-código do código em questão.

8. Considere o código de Hamming $(7, 4)$, cujas palavras-código são mostradas abaixo.

0000000	0001111	0010110	0011001
0100101	0101010	0110011	0111100
1000011	1001100	1010101	1011010
1100110	1101001	1110000	1111111

Suponha que tal código seja utilizado em conjunto com modulação BPSK para comunicação no canal AWGN com razão sinal-ruído de bit de $E_b/N_0 = 10\,\text{dB}$. Estime a probabilidade de erro de bit se for utilizada:

(a) Decodificação hard-decision.

(b) Decodificação soft-decision.

9. Considere o código de Hamming $(7, 4)$ binário, cuja matriz de verificação de paridade é dada por

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e cuja distância mínima é 3.

(a) Determine a taxa do código.

(b) Determine a matriz geradora na forma sistemática.

(c) Utilize a matriz geradora obtida no item anterior para codificar as mensagens 0000, 0001, 0010, 0011.

(d) Determine a capacidade de correção e a capacidade de detecção de erros do código.

(e) Prepare uma tabela de decodificação síndrome $\to$ padrão de erro.

(f) Utilize a tabela de decodificação do item anterior para decodificar a palavra recebida 0001111.

(g) Suponha que palavra-código 0000000 foi transmitida, mas que a palavra 1000001 tenha sido recebida. Utilize novamente a tabela de decodificação para decodificar a palavra recebida. Comente o resultado.

(h) Determine uma expressão para a probabilidade de erro de palavra-código se o código for utilizado em um canal binário simétrico (BSC) com probabilidade de troca de bit p. Assuma decodificação de mínima distância.

10. Considere o código de repetição $(4, 1)$ binário dado por

$$\mathcal{C} = \{0000, 1111\}.$$

Note que o código possui apenas duas palavras-código.

(a) Determine a taxa do código.

(b) Determine a matriz geradora na forma sistemática.

(c) Determine uma matriz de verificação de paridade para o código.

(d) Determine a distância mínima, a capacidade de correção e a capacidade de detecção de erros do código.

(e) Prepare um arranjo padrão para o código, dando preferência aos padrões de erro de menor peso. Quantos padrões de peso 1 o código é capaz de corrigir? E de peso 2?

(f) Determine uma expressão para a probabilidade de erro de palavra-código se o código for utilizado em um canal binário simétrico (BSC) com probabilidade de troca de bit p. Assuma decodificação de mínima distância.

11. [1, 10.15]

12. [1, 10.16]

13. [1, 10.17]

14. [1, 10.18]

15. [1, 10.21]

16. [1, 10.22]

17. [1, 10.23]

18. [1, 10.25]

19. [1, 10.26]

Referências

[1] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. John Wiley and Sons, 2001.

[2] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.

Respostas

1. (a) Linear. $d_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}) = 1$.

(b) Linear. $d_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}) = 1$.

(c) Não-linear. $d_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}) = 1$.

(d) Não-linear. $d_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}) = 1$.

2. (a) Sim.

(b) $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $00 \mapsto 0000$
$10 \mapsto 1011$
$01 \mapsto 0110$
$11 \mapsto 1101$.

(d) Distância mínima: 2. Capacidade de correção: 0.

3. (a) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathcal{C} = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111\}$.

(c) Capacidade de correção: 0. Capacidade de detecção: 1.

(d) —.

4. (a) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $000 \mapsto 000000$
$100 \mapsto 100111$
$010 \mapsto 010110$
$110 \mapsto 110001$
$001 \mapsto 001101$
$101 \mapsto 101010$
$011 \mapsto 011011$
$111 \mapsto 111100$.

(c) Capacidade de correção: 1. Capacidade de detecção: 2.

(d) $000 \mapsto 000000$
$111 \mapsto 100000$
$110 \mapsto 010000$
$101 \mapsto 001000$
$100 \mapsto 000100$
$010 \mapsto 000010$
$001 \mapsto 000001$
$011 \mapsto 000011$.

(e) $101100 \mapsto \underline{111}100$, $001110 \mapsto \underline{001}101$, $101010 \mapsto \underline{101}010$.

5. (a) $\mathcal{C} = \{000000, 101110, 011011, 110101\}$.

(b) (Em breve.)

6. $\mathcal{C} = \{00000, 10011, 01110, 11101\}$. Taxa: $2/5$.

7. 11110000 é palavra-código. 00011000 não é palavra-código.

8. (Em breve.)

9. (Em breve.)

10. (Em breve.)