Instituto Federal de Santa Catarina

Curso superior de tecnologia em sistemas de telecomunicação

Processamento de Sinais Digitais - PSD

Resposta de entrada nula

Prof. Diego da Silva de Medeiros

Fonte: Lathi – Sinais e Sistemas Lineares

São José, Agosto de 2013

Equação diferença e Notação Operacional

- Equação diferença genérica:

$$y[n+N]+a_1 y[n+N-1]+...+a_N y[n]=b_0 x[n+M]+b_1 x[n+M-1]+...+b_M x[n]$$

- Equação diferença em notação operacional:

$$\left(E^N+a_1 E^{N-1}+...+a_{N-1} E+a_N\right) y[n]=\left(b_0 E^N+b_1 E^{N-1}+...+b_{N-1} E+b_N\right) x[n]$$

- Forma alternativa:

$$Q[E]\, y[n]=P[E]\, x[n]$$

onde

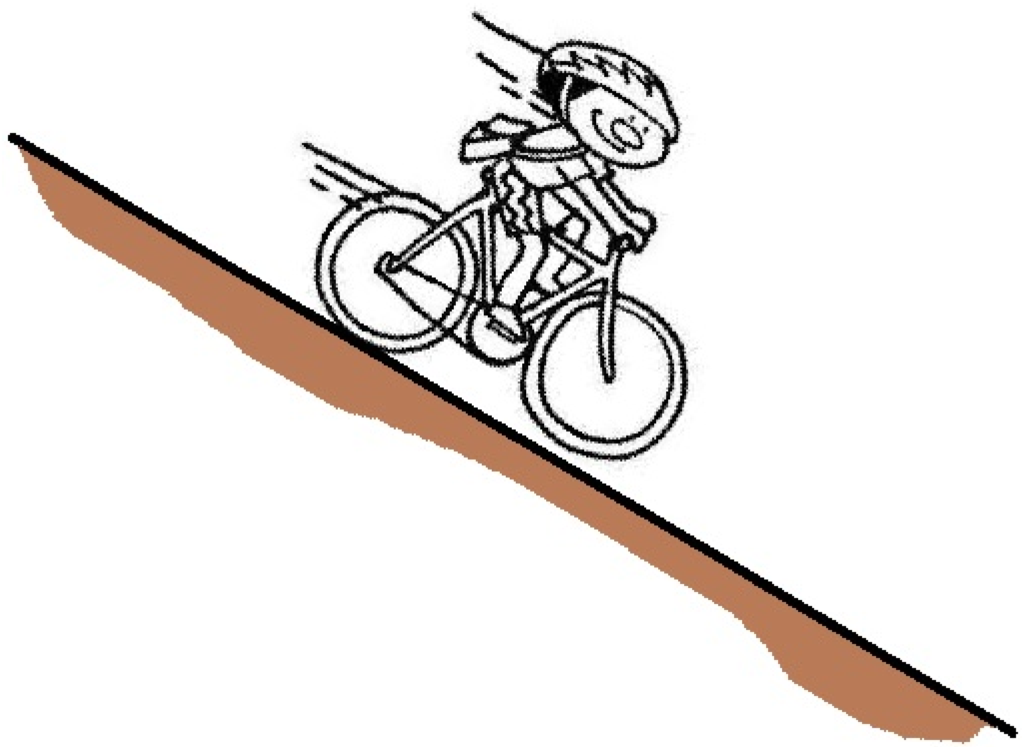
$$\begin{aligned} Q[E] &= E^N+a_1 E^{N-1}+...+a_{N-1} E+a_N \\ P[E] &= b_0 E^N+b_1 E^{N-1}+...+b_{N-1} E+b_N \end{aligned}$$

Solução de sistemas (1)

- Sistema 1 – Bicicleta em via horizontal
  - Entrada – Força da perna pedalando
  - Saída – Movimento da bicicleta

Solução de sistemas (2)

- Sistema 2 – Bicicleta em via inclinada
  - Entrada – Força da perna pedalando
  - Saída – Movimento da bicicleta
  - Condições iniciais – Movimento da bicicleta “na banguela”



Solução de sistemas (3)

- Solução total do sistema medida separadamente:

  - Resposta do sistema devido às condições iniciais
    - Entradas iguais a zero
    - **Resposta de entrada nula**

  - Resposta do sistema devido à entrada
    - Condições iniciais iguais a zero
    - **Resposta de estado nulo**

Resposta de entrada nula (1)

- Solução da equação diferença, assumindo que não há sinais de entrada
- Também conhecida como **solução homogênea**

$$y[n+N]+a_1 y[n+N-1]+\ldots+a_N y[n]=0$$

ou

$$\left(E^N+a_1 E^{N-1}+\ldots+a_{N-1} E+a_N\right) y[n]=0$$

ou

$$Q[E]\, y[n]=0$$

onde

$$Q[E] \quad = \quad E^N+a_1 E^{N-1}+\ldots+a_{N-1} E+a_N$$

- Versões deslocadas do sinal de saída **devem somar 0**

Resposta de entrada nula (2)

- O único sinal que respeita a solução homogênea é a exponencial

$$E^k(\gamma^n) = \gamma^{k+n} = \gamma^k \gamma^n$$

- Solução da resposta de entrada nula na forma:

$$y_0[n] = c\gamma^n$$

- Substituindo

$$c\left(\gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\gamma + a_N\right)\gamma^n = 0$$

Resposta de entrada nula (3)

- Solução não trivial:

$$\gamma^{N} + a_1\gamma^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\gamma + a_N = 0$$

ou

$$Q[\gamma] = 0$$

- Solução não trivial é um polinônio de grau *N*

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\cdots(\gamma - \gamma_N) = 0$$

- Problema pode ser de três formas:
  - Raízes distintas
  - Raízes repetidas
  - Raízes complexas

Soluções – Raízes distintas

- Raízes distintas:

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\cdots(\gamma - \gamma_N)=0$$

com $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \cdots \neq \gamma_N$

- Solução:

$$y_0[n]=c_1\gamma_1^n+c_2\gamma_2^n+\cdots+c_N\gamma_N^n$$

onde $c_i=$constantes do problema, obtidas a partir das condições iniciais

Soluções – Raízes repetidas

- Raízes repetidas:

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\cdots(\gamma - \gamma_N)=0$$

com $\gamma_1 = \cdots = \gamma_N$

- Solução:

$$y_0[n]=\left(c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{N-1} n^{N-1}\right)\gamma_1^n$$

onde c_i=constantes do problema, obtidas a partir das condições iniciais

Soluções – Raízes complexas

- Raízes complexas (forma polar):

$$\gamma = \alpha e^{j\beta} \quad \text{e} \quad \gamma^* = \alpha e^{-j\beta}$$

- Solução:

$$y_0[n] = c_1 \gamma^n + c_2 (\gamma^*)^n$$

- Para um sistema real

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

- E então:

$$y_0[n] = \frac{c}{2} \alpha^n \cos(\beta n + \theta)$$

Nomenclatura

$Q[\gamma]$	Polinônio característico
$Q[\gamma]=0$	Equação característica
$\gamma_{1,} \gamma_{2,} \cdots, \gamma_N$	Raízes ou valores característicos, **autovalores**
$\gamma_1^n, \gamma_2^n, \cdots, \gamma_N^n$	Modos característicos, modos naturais
$y_0[n]$	Resposta de entrada nula

Exercícios (Lathi)

- Exemplo 3.10, pg. 252
- Exercícios E3.11, E3.12 e E3.13, pg. 255
- Exemplo de computador C3.4 para os sistemas dos outros exercícios