PRE29006 **LISTA DE EXERCÍCIOS #2** **2016.2**

Exercícios

1. Considere duas variáveis aleatórias X e Y definidas por

$$X = 3U - 4V,$$
$$Y = 2U + V,$$

onde U e V são variáveis aleatórias reais, gaussianas, descorrelacionadas entre si, ambas de média nula variância unitária. Determine:

(a) As médias de X e Y.

(b) As variâncias de X e Y.

(c) A covariância entre X e Y.

(d) A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y.

2. [1, Exercício 6.2] Seja $\vec{X} = [X_1 \ \ X_2 \ \ X_3]^{\mathrm{T}}$ um vetor gaussiano de média nula e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f_{\vec{X}}(\vec{x})$.

(b) Se $Y = X_1 + 3X_2 - X_3$, determine $f_Y(y)$.

(c) Determine $f_{\vec{Z}}(\vec{z})$, onde

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

(d) Determine $f_{X_1|X_2=\alpha}(x_1)$.

3. [1, Exercício 6.3] As componentes do vetor $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; X_3 \;\; X_4]^{\mathrm{T}}$ são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas com média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^{\mathrm{T}}$ e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine $f_{X_1,X_2|X_3=\alpha,X_4=\beta}(x_1, x_2)$.

4. [1, Exercício 6.4] Um vetor gaussiano $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; X_3]^{\mathrm{T}}$ tem média nula e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f_{X_1,X_3}(x_1, x_3)$.

(b) Calcule $\Pr[0 \leq X_3 \leq 2 \mid 3 \leq X_1 \leq 3{,}5]$.

5. [1, Exercício 7.1] Seja A uma variável aleatória uniforme no intervalo $[0, 1]$. Considere o processo estocástico

$$X(t) = \mathrm{e}^{-At}.$$

Calcule a função média e a função autocorrelação do processo $X(t)$.

6. [1, Exercício 7.2] Considere o processo estocástico $X(t)$ definido por

$$X(t) = At^2 + b,$$

onde A é uma variável aleatória Gaussiana de média nula e variância unitária e b é uma constante qualquer.

(a) Determine a função média e a função variância do processo $X(t)$.

(b) Determine a função densidade de probabilidade de primeira ordem do processo, ou seja, determine $f_{X(t)}(x)$.

(c) Determine a função autocorrelação e a função autocovariância do processo $X(t)$.

7. Considere o processo estocástico

$$X(t) = A\,\mathrm{rect}(t),$$

em que A é uma variável aleatória discreta que assume os valores 0, 1 e 2 com igual probabilidade.

(a) Esboce todas as possíveis realizações (isto é, funções-amostra) de $X(t)$.

(b) Determine a função densidade de probabilidade de primeira ordem de $X(t)$.

(c) Determine a função média de $X(t)$.

(d) Determine a função autocorrelação de $X(t)$.

(e) O processo $X(t)$ é estacionário no sentido estrito? E no sentido amplo? Justifique.

8. Sejam A e B variáveis aleatórias independentes tais que A é uniformemente distribuída no intervalo $[-1, +1]$ e B é discreta com $\Pr[B = -1] = \Pr[B = +1] = 1/2$. Seja também $X(t)$ um processo estocástico definido por

$$X(t) = At + B.$$

(a) Determine a função média e a função autocorrelação do processo $X(t)$.

(b) O processo $X(t)$ é estacionário no sentido estrito? E no sentido amplo? Justifique.

9. Seja $B[k]$ um processo estocástico (de parâmetro discreto) em que $B[k] \sim \text{Bernoulli}(p)$, para todo k, com $B[k_1]$ independente de $B[k_2]$ para $k_1 \neq k_2$. Seja

$$X[k] = \begin{cases} -a, & \text{se } B[k] = 0, \\ +a, & \text{se } B[k] = 1, \end{cases}$$

onde a é uma constante. Calcule a função média e a função autocorrelação de $X[k]$.

10. [1, Exercício 7.11] Um processo estocástico $X(t)$ é dado por

$$X(t) = A\cos(2\pi Ft + \Theta),$$

onde A, F e Θ são variáveis aleatórias estatisticamente independentes tais que:

- A tem média μ_A e variância σ_A^2.
- F é uniformemente distribuída no intervalo $[0, f_0]$.
- Θ é uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$.

(a) Determine a função média e a a função autocorrelação de $X(t)$. Conclua que $X(t)$ é estacionário no sentido amplo.

(b) Determine a potência média de $X(t)$.

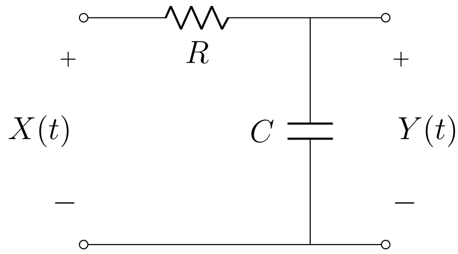
(c) Determine a densidade espectral de potência de $X(t)$.

11. [2, Problems 18.28, 18.29] Determine e esboce a função autocorrelação e a função densidade espectral de potência do sinal na saída de um sistema linear invariante no tempo com resposta ao impulso $h(t)$, supondo na entrada ruído branco $X(t)$ com média nula e função autocorrelação $R_X(\tau) = (n_0/2)\delta(\tau)$, para:

(a) $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0} \mathrm{e}^{-t/t_0}, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$ (b) $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0}, & \text{se } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Considere que n_0 e t_0 sejam constantes positivas.

12. [2, Exemplo 7.8] Considere um processo estocástico de ruído branco $X(t)$ com média nula e densidade espectral de potência dada por $S_X(f) = n_0/2$, onde n_0 é uma constante positiva. Determine a média, a função autocorrelação, a densidade espectral de potência e a potência média do processo estocástico $Y(t)$ obtido pela passagem de $X(t)$ através do filtro RC mostrado abaixo.



13. [1, Exercício 7.6] Um processo estocástico gaussiano $X(t)$ tem média nula e função autocorrelação

$$R_X(t_1, t_2) = 2^{-|t_2 - t_1|}.$$

Uma pessoa que desconhece o valor da média do processo $X(t)$ e que tem acesso a uma função amostra do mesmo resolve estimar esta média por

$$M = \frac{X(0) + X(1) + X(2)}{3}.$$

Note que M é uma variável aleatória. Determine a probabilidade de que o módulo do erro cometido exceda o valor 1.

14. [1, Exercício 7.7] Seja $X(t)$ um processo estocástico gaussiano de média nula e função autocorrelação dada por

$$R_X(t_1, t_2) = a\, \mathrm{e}^{-|t_2 - t_1|},$$

onde a é uma constante positiva. Sabe-se que a variável aleatória $X(20)$, definida no instante $t = 20$, excede o valor 6 com probabilidade 0,13499%. Seja

$$Y(t) = X(t) + X(t - b),$$

onde b é uma constante.

(a) Determine o valor da constante a.

(b) Determine a função média e a função autocorrelação do processo $Y(t)$, concluindo sobre sua estacionariedade no sentido amplo.

(c) Calcule o coeficiente de Pearson entre $Y(0)$ e $Y(2)$, para $b = 1$.

15. [1, Exercício 7.13] Um processo estocástico gaussiano $X(t)$ tem função média

$$\mu_X(t) = \frac{1}{2}$$

e função autocorrelação

$$R_X(\tau) = 2\delta(\tau).$$

O processo $X(t)$ passa através de um sistema linear cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = \mathrm{e}^{-t} u(t),$$

(onde $u(t)$ denota a função degrau unitário), resultando no processo estocástico $Y(t)$. Determine a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias $Y(0)$ e $Y(1)$, ou seja, determine $f_{Y(0),Y(1)}(y_0, y_1)$.

16. Seja $X[k]$ um processo estocástico de parâmetro discreto, em que

$$\ldots, X[-2], X[-1], X[0], X[1], X[2], \ldots$$

são variáveis aleatórias gaussianas i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) de média 0 e variância 1. Seja

$$Y[k] = X[k] - X[k-1].$$

(a) Determine e esboce a função autocovariância de $Y[k]$, em função de $\ell = k_2 - k_1$.

(b) Determine a função densidade de probabilidade de $Y[8]$.

(c) Calcule $\Pr[Y[8] > 0 \mid Y[6] > 0]$.

Exercícios complementares

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas.

(a) Determine a PDF conjunta entre X e Y, isto é, $f_{X,Y}(x, y)$.

(b) Determine a PDF condicional de X dado que $Y = y$, isto é, $f_{X|Y=y}(x)$.

Suas respostas devem estar em função de $\mu_X = \mathrm{E}[X]$, $\mu_Y = \mathrm{E}[Y]$, $\sigma_X^2 = \mathrm{var}[X]$, $\sigma_Y^2 = \mathrm{var}[Y]$ e do coeficiente de Pearson,

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{var}[X]\,\mathrm{var}[Y]}}.$$

Observação: Após resolver o item (b), conclua que

$$X \mid (Y = y) \quad \sim \quad \mathrm{N}\left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho(y - \mu_Y),\ (1 - \rho^2)\sigma_X^2\right).$$

2. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, ambas de média nula e variância unitária. Seja $\rho = \rho_{X,Y}$ o coeficiente de Pearson entre X e Y. Assuma que $|\rho| < 1$.

(a) Determine a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y. (1,0)

(b) Considere as variáveis aleatórias $U = X + Y$ e $V = Y - X$. Calcule a média de U e de V, a variância de U e de V e a covariância entre U e V. São U e V dependentes ou independentes? Justifique.

(c) Baseado no item anterior, encontre uma transformação linear que, quando aplicada ao vetor $[X \quad Y]^{\mathrm{T}}$, forneça um vetor $[\bar{X} \quad \bar{Y}]^{\mathrm{T}}$ tal que $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ sejam conjuntamente gaussianas, independentes, ambas de média nula e variância unitária.

3. Demonstre os seguintes fatos.

(a) Se $X(t)$ é estacionário de ordem n, então $X(t)$ é estacionário de ordem $n - 1$.
(Por simplicidade, prove para o caso particular $n = 3$.)

(b) Se $X(t)$ é estacionário de 2ª ordem, então $X(t)$ é estacionário no sentido amplo.
(Como visto em sala de aula através de um contra-exemplo, a recíproca é falsa!)

4. Seja $R_X(\tau)$ a função autocorrelação e $S_X(f)$ a densidade espectral de potência de um processo estocástico real $X(t)$ estacionário no sentido amplo. Mostre que:

(a) $R_X(\tau)$ é par, isto é, $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$.

(b) $R_X(0) = \mathrm{E}[X^2(t)] = P_X$ [potência média de $X(t)$ = valor médio quadrático de $X(t)$].

(c) $|R_X(\tau)|$ assume seu valor máximo em $\tau = 0$.
(*Dica:* Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o valor esperado: $\mathrm{E}[XY]^2 \leq \mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2]$.)

(d) $S_X(f) = 2\int_0^\infty R_X(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$.
(*Dica:* Utilize o teorema de Wiener-Khinchin e a fórmula de Euler.)

(e) $S_X(f)$ é real e par.
(*Dica:* Utilize os itens (a) e (d).)

(f) $S_X(f) \geq 0$, para todo f.

Referências

[1] J. P. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos.* Editora Interciência, 2008.

[2] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®.* Springer, 2006.

Respostas

1. (a) $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = 0$. (b) $\mathrm{var}[X] = 25$ e $\mathrm{var}[Y] = 5$.
(c) $\mathrm{cov}[X, Y] = 2$. (d) $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi \cdot 11} \exp\big(-\frac{1}{242}[5x^2 + 25y^2 - 4xy]\big)$.

2. (a) $f_{\vec{X}}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot 6} \exp\big(-\frac{5}{12}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{12}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2\big)$.
(b) $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 72}} \exp\big(-\frac{1}{144}y^2\big)$.
(c) $f_{\vec{Z}}(z_1, z_2, z_3) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot 108} \exp\big(-\frac{1}{72}z_1^2 - \frac{5}{72}z_2^2 - \frac{1}{9}z_3^2 - \frac{1}{18}z_1z_2 - \frac{1}{18}z_1z_3 - \frac{1}{9}z_2z_3\big)$.
(d) $f_{X_1|X_2=\alpha}(x_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 6/5}} \exp\Big(-\frac{1}{2\cdot 6/5}[x_1 - \frac{3}{5}\alpha]^2\Big)$.

3. $f_{X_1,X_2|X_3=\alpha,X_4=\beta}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\pi} \exp\big(-[x_1 - 1]^2 - \frac{1}{2}[x_2 - 1]^2 + [x_1 - 1][x_2 - 1]\big)$.

4. (a) $f_{X_1,X_3}(x_1, x_3) = \dfrac{1}{2\pi \cdot 3} \exp\big(-\frac{1}{18}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2\big)$.
(b) $\Pr[0 \le X_3 \le 2 \mid 3 \le X_1 \le 3{,}5] = \Phi(2) - \frac{1}{2} \approx 0{,}477\,25$.

5. $\mu_X(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}$ e $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-(t_1+t_2)}}{t_1 + t_2}$.

6. (a) $\mu_X(t) = b$, $\sigma_X^2(t) = t^4$. (b) $f_{X(t)}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2t^4}}$.
(c) $R_X(t_1, t_2) = t_1^2 t_2^2 + b^2$, $K_X(t_1, t_2) = t_1^2 t_2^2$.

7. (a) 0, $\mathrm{rect}(t)$, $2\,\mathrm{rect}(t)$. (b) $f_{X(t)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\delta(x) + \dfrac{1}{3}\delta(x - 1) + \dfrac{1}{3}\delta(x - 2), & \text{se } |t| \le 1/2, \\ \delta(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$
(c) $\mu_X(t) = \mathrm{rect}(t)$. (d) $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{5}{3} \mathrm{rect}(t_1)\,\mathrm{rect}(t_2)$. (e) Não para ambos.

8. (a) $\mu_X(t) = 0$, $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{1}{3}t_1t_2 + 1$. (b) Não para ambos.

9. $\mu_X[k] = a(2p - 1)$, $R_X[k_1, k_2] = \begin{cases} a^2, & \text{se } k_1 = k_2, \\ a^2(2p - 1)^2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

10. (a) $\mu_X(t) = 0$ e $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{\sigma_A^2 + \mu_A^2}{2} \operatorname{sinc}\big(2f_0(t_2 - t_1)\big)$. (b) $P_X = \dfrac{\sigma_A^2 + \mu_A^2}{2}$.
(c) $S_X(f) = \dfrac{\sigma_A^2 + \mu_A^2}{4f_0} \operatorname{rect}\left(\dfrac{f}{2f_0}\right)$.

11. (a) $R_Y(\tau) = \dfrac{n_0}{4t_0}\mathrm{e}^{-\frac{|\tau|}{t_0}}$ e $S_Y(f) = \dfrac{n_0}{2} \dfrac{1}{1 + (2\pi t_0 f)^2}$. (b) $R_Y(\tau) = \dfrac{n_0}{2t_0} \operatorname{tri}\left(\dfrac{\tau}{t_0}\right)$ e $S_Y(f) = \dfrac{n_0}{2} \operatorname{sinc}^2(t_0 f)$.

12. $\mu_Y = 0$, $R_Y(\tau) = \dfrac{n_0}{4RC}\mathrm{e}^{-\frac{|\tau|}{RC}}$, $S_Y(f) = \dfrac{n_0/2}{1 + (2\pi RCf)^2}$, $P_Y = \dfrac{n_0}{4RC}$.

13. $2\,Q(\sqrt{18/11}) = 0{,}201$

14. (a) $a = 4$. (b) $\mu_Y(t) = 0$, $R_Y(t_1, t_2) = 8\mathrm{e}^{-|\tau|} + 4\mathrm{e}^{-|\tau-b|} + 4\mathrm{e}^{-|\tau+b|}$, onde $\tau = t_2 - t_1$. (c) 0,252.

15. $\begin{bmatrix} Y(0) \\ Y(1) \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{4} \\ \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\right)$, de onde pode ser obtido $f_{Y(0),Y(1)}(y_0, y_1)$.

16. (a) $R_Y[\ell] = \begin{cases} 2, & \text{se } \ell = 0, \\ 1, & \text{se } \ell = \pm 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ (b) $f_{Y(8)}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}$. (c) $\dfrac{1}{2}$.