INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
COORDENADORIA DE ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

PRE29006 **LISTA DE EXERCÍCIOS #2** **2016.1**

Exercícios

1. Determine a média e a variância das seguintes distribuições de probabilidade.

(a) $\text{Bern}(p)$.

(b) $\text{Unif}(a, b)$.

(c) $\text{Geom}(p)$.

(d) $\text{Exp}(\lambda)$.

(e) $\text{Rayleigh}(\sigma)$.

(f) $\text{Laplace}(b)$.

Caso necessário, pesquise no caderno para encontrar a definição de cada distribuição.

2. [1, Exercício 5.4] Um sinal de trânsito permanece, alternadamente, 30 segundos aberto e 30 segundos fechado. Seja X a variável aleatória que caracteriza o tempo de espera de um motorista que passe por este sinal, em segundos. Determine o tempo de espera médio, em segundos.

3. [1, Exercício 5.2] Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e Y uma outra variável aleatória que depende de X através da relação $Y = X(1-X)$. Determine a média, o valor médio quadrático e a variância de Y.

4. [2, Exercício 3.3.20] Sendo a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

qual o valor médio quadrático de Y?

5. [2, Exercício 3.3.17] Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde k é uma constante real. Determine $\text{E}[X]$, $\text{E}[Y]$, $\text{E}[X \mid Y = 1]$ e $\text{E}[Y \mid X = 0]$.

6. Seja $\vec{X} = [X \;\; Y]^{\mathrm{T}}$ um vetor aleatório com PDF dada por

$$f_{\vec{X}}(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante k.

(b) Determine o vetor média de $\vec{X}$.

(c) Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

7. Seja $\vec{X} = [X \;\; Y]^{\mathrm{T}}$ um vetor aleatório com PDF dada por

$$f_{\vec{X}}(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o vetor média de $\vec{X}$.

(b) Determine a matriz covariância de $\vec{X}$.

8. [3, Example 9.4] Considere duas variáveis aleatórias discretas X_1 e X_2 distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

$X_1 \backslash X_2$	-8	0	2	6
-8	0	1/4	0	0
0	1/4	0	0	0
2	0	0	0	1/4
6	0	0	1/4	0

Seja $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2]^{\mathrm{T}}$. Determine o vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}}$ e a matriz covariância $K_{\vec{X}}$.

9. Considere duas variáveis aleatórias X e Y definidas por

$$X = 3U - 4V,$$
$$Y = 2U + V,$$

onde U e V são variáveis aleatórias reais, gaussianas, descorrelacionadas entre si, ambas de média nula variância unitária. Determine:

(a) As médias de X e Y.

(b) As variâncias de X e Y.

(c) A covariância entre X e Y.

(d) A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y.

10. [1, Exercício 6.1] As variáveis aleatórias X e Y são conjuntamente gaussianas com médias nulas e variâncias respectivamente iguais a 2 e 3. Sabendo-se que o coeficiente de correlação de Pearson entre essas duas variáveis aleatórias é $\rho_{X,Y} = 0{,}5$, escreva a expressão da função densidade de probabilidade conjunta dessas duas variáveis aleatórias. O que acontece quando $\rho_{X,Y}$ tende para 1?

11. Sejam X e Y variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas.

(a) Determine a PDF conjunta entre X e Y, isto é, $f_{X,Y}(x, y)$.

(b) Determine a PDF condicional de X dado que $Y = y$, isto é, $f_{X|Y=y}(x)$.

Suas respostas devem estar em função de $\mu_X = \mathrm{E}[X]$, $\mu_Y = \mathrm{E}[Y]$, $\sigma_X^2 = \mathrm{var}[X]$, $\sigma_Y^2 = \mathrm{var}[Y]$ e do coeficiente de correlação de Pearson,

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{var}[X]\,\mathrm{var}[Y]}}.$$

Observação: Após resolver o item (b), conclua que

$$X \mid (Y = y) \quad \sim \quad \mathrm{N}\left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho(y - \mu_Y),\ (1-\rho^2)\sigma_X^2\right).$$

12. [1, Exercício 6.2] Seja $\vec{X} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]^{\mathrm{T}}$ um vetor gaussiano de média nula e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Determine $f_{\vec{X}}(\vec{x})$.

(b) Se $Y = X_1 + 3X_2 - X_3$, determine $f_Y(y)$.

(c) Determine $f_{\vec{Z}}(\vec{z})$, onde

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

(d) Determine $f_{X_1|X_2=\alpha}(x_1)$.

13. [1, Exercício 6.3] As componentes do vetor $\vec{X} = [X_1 \ \ X_2 \ \ X_3 \ \ X_4]^{\mathrm{T}}$ são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas com média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]^{\mathrm{T}}$ e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine $f_{X_1,X_2|X_3=\alpha,X_4=\beta}(x_1, x_2)$.

14. [1, Exercício 6.4] Um vetor gaussiano $\vec{X} = [X_1 \ \ X_2 \ \ X_3]^{\mathrm{T}}$ tem média nula e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f_{X_1,X_3}(x_1, x_3)$.

(b) Calcule $\Pr[0 \leq X_3 \leq 2 \mid 3 \leq X_1 \leq 3{,}5]$.

15. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, ambas de média nula e variância unitária. Seja $\rho = \rho_{X,Y}$ o coeficiente de correlação de Pearson entre X e Y. Assuma que $|\rho| < 1$.

(a) Determine a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y. (1,0)

(b) Considere as variáveis aleatórias $U = X + Y$ e $V = Y - X$. Calcule a média de U e de V, a variância de U e de V e a covariância entre U e V. São U e V dependentes ou independentes? Justifique.

(c) Baseado no item anterior, encontre uma transformação linear que, quando aplicada ao vetor $[X \ \ Y]^{\mathrm{T}}$, forneça um vetor $[\bar{X} \ \ \bar{Y}]^{\mathrm{T}}$ tal que $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ sejam conjuntamente gaussianas, independentes, ambas de média nula e variância unitária.

Exercícios complementares

1. Sejam n um inteiro positivo e p um número real tal que $0 \leq p \leq 1$. Uma variável aleatória binomial X com parâmetros n e p tem a seguinte PMF:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

onde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

é o coeficiente binomial (daí o nome da distribuição). Alternativamente, a variável aleatória X pode ser expressa como

$$X = B_1 + \cdots + B_n, \tag{2}$$

onde $B_1, \ldots, B_n$ são variáveis aleatórias independentes, todas distribuídas de acordo com a distribuição de Bernoulli com parâmetro p, isto é,

$$p_{B_i}(b) = \begin{cases} 1 - p, & \text{se } b = 0, \\ p, & \text{se } b = 1, \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, n$.

(a) Determine a média de X.

(b) Determine a variância de X.

Sugestão: Utilize a Equação (2), e não a Equação (1)!

2. [1, Exercício 5.5] Considere uma variável aleatória U uniformemente distribuída em $[-1, 1]$. Considere ainda duas variáveis aleatórias X e Y, definidas por $X = U^2$ e $Y = U^3$.

(a) Mostre que X e Y são descorrelacionadas.

(b) Mostre que $\mathrm{E}[X^2Y^2] \neq \mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2]$ e conclua que X e Y não são independentes.

3. A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida como

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

onde $\mu_X = \mathrm{E}[X]$ e $\mu_Y = \mathrm{E}[Y]$.

(a) Mostre que $\operatorname{cov}[X, Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.

(b) Mostre que $\operatorname{var}[X + Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X, Y]$.

(c) Mostre que a covariância é *bilinear*, isto é, é linear em ambos os argumentos:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha \operatorname{cov}[X, Z] + \beta \operatorname{cov}[Y, Z], \\ \operatorname{cov}[X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha \operatorname{cov}[X, Y] + \beta \operatorname{cov}[X, Z], \end{aligned}$$

onde α e β são constantes e X, Y, Z são variáveis aleatórias. (É necessário apenas mostrar a primeira linha; a segunda linha segue de modo similar.)

(d) Utilize o item anterior para mostrar que, se $Y = aX + b$, onde a e b são constantes, então o coeficiente de correlação

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}[X, Y]}{\sqrt{\operatorname{var}[X] \operatorname{var}[Y]}}$$

vale $+1$ ou -1.

Referências

[1] J. P. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos.* Editora Interciência, 2008.

[2] P. L. O. Costa Neto and M. Cymbalista, *Probabilidades*, 2nd ed. Editora Edgard Blücher, 2006.

[3] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®.* Springer, 2006.

Respostas

1. (a) p e $p(1-p)$. (b) $\dfrac{a+b}{2}$ e $\dfrac{(b-a)^2}{12}$. (c) $\dfrac{1}{p}$ e $\dfrac{1-p}{p^2}$. (d) $\dfrac{1}{\lambda}$ e $\dfrac{1}{\lambda^2}$. (e) $\sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ e $\dfrac{4-\pi}{2}\sigma^2$. (f) 0 e $2b^2$.

2. 7,5 s.

3. $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{30}$ e $\dfrac{1}{180}$.

4. $\mathrm{E}[Y^2] = 2$.

5. $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X \mid Y = 1] = \dfrac{2}{3}, \quad \mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[Y \mid X = 0] = \dfrac{3}{2}.$

6. (a) $k = 1$. (b) $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 7/12 \\ 7/12 \end{bmatrix}$. (c) $K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 11/144 & -1/144 \\ -1/144 & 11/144 \end{bmatrix}$.

7. (a) $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$. (b) $K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{bmatrix}$.

8. $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}$.

9. (a) $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = 0$. (b) $\mathrm{var}[X] = 25$ e $\mathrm{var}[Y] = 5$.
(c) $\mathrm{cov}[X, Y] = 2$. (d) $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi \cdot 11} \exp\left(-\frac{1}{242}[5x^2 + 25y^2 - 4xy]\right)$.

10. $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{9/2}} \exp\left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}y^2 + \frac{\sqrt{6}}{9}xy\right)$.

Quando $\rho_{X,Y} \to 1$, a matriz $K_{X,Y}$ torna-se singular (não-inversível). Nesse caso, X e Y satisfazem a seguinte relação linear: $Y = \sqrt{3/2}X$.

11. (a) $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)\sigma_X^2\sigma_Y^2}} \exp\left(-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \dfrac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \dfrac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$.
(b) $f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_X^2}} \exp\left(-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2}\left[x - \mu_X - \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho(y-\mu_Y)\right]^2\right)$.

12. (a) $f_{\vec{X}}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot 6} \exp\left(-\frac{5}{12}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{12}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2\right)$.
(b) $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 72}} \exp\left(-\frac{1}{144}y^2\right)$.
(c) $f_{\vec{Z}}(z_1, z_2, z_3) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot 108} \exp\left(-\frac{1}{72}z_1^2 - \frac{5}{72}z_2^2 - \frac{1}{9}z_3^2 - \frac{1}{18}z_1z_2 - \frac{1}{18}z_1z_3 - \frac{1}{9}z_2z_3\right)$.
(d) $f_{X_1|X_2=\alpha}(x_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 6/5}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 6/5}[x_1 - \frac{3}{5}\alpha]^2\right)$.

13. $f_{X_1,X_2|X_3=\alpha,X_4=\beta}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\pi} \exp\left(-[x_1-1]^2 - \frac{1}{2}[x_2-1]^2 + [x_1-1][x_2-1]\right)$.

14. (a) $f_{X_1,X_3}(x_1,x_3) = \dfrac{1}{2\pi \cdot 3} \exp\left(-\frac{1}{18}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2\right)$.

(b) $\Pr[0 \leq X_3 \leq 2 \mid 3 \leq X_1 \leq 3{,}5] = \Phi(2) - \frac{1}{2} \approx 0{,}477\,25$.

15. (a) $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(-\dfrac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$.

(b) $\mathrm{E}[U] = \mathrm{E}[V] = 0$, $\mathrm{var}[U] = 2(1+\rho)$, $\mathrm{var}[V] = 2(1-\rho)$, $\mathrm{cov}[U,V] = 0$.

U e V são independentes, pois são gaussianas e descorrelacionadas.

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1+\rho)^{-1/2} & (1+\rho)^{-1/2} \\ -(1-\rho)^{-1/2} & (1-\rho)^{-1/2} \end{bmatrix}$