



## Exercícios

1. Determine a média e a variância das seguintes distribuições de probabilidade.

(a) Bern( $p$ ).

(d) Exp( $\lambda$ ).

(b) Unif( $a, b$ ).

(e) Rayleigh( $\sigma$ ).

(c) Geom( $p$ ).

(f) Laplace( $b$ ).

Caso necessário, pesquise no caderno para encontrar a definição de cada distribuição.

2. [1, Exercício 5.4] Um sinal de trânsito permanece, alternadamente, 30 segundos aberto e 30 segundos fechado. Seja  $X$  a variável aleatória que caracteriza o tempo de espera de um motorista que passe por este sinal, em segundos. Determine o tempo de espera médio, em segundos.

3. [1, Exercício 5.2] Seja  $X$  uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  e  $Y$  uma outra variável aleatória que depende de  $X$  através da relação  $Y = X(1 - X)$ . Determine a média, o valor médio quadrático e a variância de  $Y$ .

4. [2, Exercício 3.3.20] Sendo a função densidade de probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$  dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

qual o valor médio quadrático de  $Y$ ?

5. [2, Exercício 3.3.17] Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante real. Determine  $E[X]$ ,  $E[Y]$ ,  $E[X | Y = 1]$  e  $E[Y | X = 0]$ .

6. Seja  $\vec{X} = [X \ Y]^T$  um vetor aleatório com PDF dada por

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} k(x + y), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante  $k$ .
- (b) Determine o vetor média de  $\vec{X}$ .
- (c) Determine a matriz covariância de  $\vec{X}$ .

7. Seja  $\vec{X} = [X \ Y]^T$  um vetor aleatório com PDF dada por

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o vetor média de  $\vec{X}$ .
- (b) Determine a matriz covariância de  $\vec{X}$ .

8. [3, Example 9.4] Considere duas variáveis aleatórias discretas  $X_1$  e  $X_2$  distribuídas conjuntamente de acordo com a tabela abaixo.

$X_1 \backslash X_2$	-8	0	2	6
-8	0	1/4	0	0
0	1/4	0	0	0
2	0	0	0	1/4
6	0	0	1/4	0

Seja  $\vec{X} = [X_1 \ X_2]^T$ . Determine o vetor média  $\vec{\mu}_{\vec{X}}$  e a matriz covariância  $K_{\vec{X}}$ .

9. Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  definidas por

$$\begin{aligned} X &= 3U - 4V, \\ Y &= 2U + V, \end{aligned}$$

onde  $U$  e  $V$  são variáveis aleatórias reais, gaussianas, descorrelacionadas entre si, ambas de média nula variância unitária. Determine:

- (a) As médias de  $X$  e  $Y$ .
- (b) As variâncias de  $X$  e  $Y$ .
- (c) A covariância entre  $X$  e  $Y$ .
- (d) A função densidade de probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$ .

10. [1, Exercício 6.1] As variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são conjuntamente gaussianas com médias nulas e variâncias respectivamente iguais a 2 e 3. Sabendo-se que o coeficiente de correlação entre essas duas variáveis aleatórias é  $\rho_{X,Y} = 0,5$ , escreva a expressão da função densidade de probabilidade conjunta dessas duas variáveis aleatórias. O que acontece quando  $\rho_{X,Y}$  tende para 1?

11. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas.

(a) Determine a PDF conjunta entre  $X$  e  $Y$ , isto é,  $f_{X,Y}(x, y)$ .

(b) Determine a PDF condicional de  $X$  dado que  $Y = y$ , isto é,  $f_{X|Y=y}(x)$ .

Suas respostas devem estar em função de  $\mu_X = E[X]$ ,  $\mu_Y = E[Y]$ ,  $\sigma_X^2 = \text{var}[X]$ ,  $\sigma_Y^2 = \text{var}[Y]$  e do coeficiente de correlação de Pearson,

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}}.$$

*Observação:* Após resolver o item (b), conclua que

$$X | (Y = y) \sim N\left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \rho (y - \mu_Y), (1 - \rho^2) \sigma_X^2\right).$$

12. [1, Exercício 6.2] Seja  $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$  um vetor gaussiano de média nula e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Determine  $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ .

(b) Se  $Y = X_1 + 3X_2 - X_3$ , determine  $f_Y(y)$ .

(c) Determine  $f_{\vec{Z}}(\vec{z})$ , onde

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

(d) Determine  $f_{X_1|X_2=\alpha}(x_1)$ .

13. [1, Exercício 6.3] As componentes do vetor  $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]^T$  são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas com média  $\mu_{\vec{X}} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine  $f_{X_1, X_2 | X_3 = \alpha, X_4 = \beta}(x_1, x_2)$ .

14. [1, Exercício 6.4] Um vetor gaussiano  $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$  tem média nula e matriz covariância

$$K_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine  $f_{X_1, X_3}(x_1, x_3)$ .
- (b) Calcule  $\Pr[0 \leq X_3 \leq 2 \mid 3 \leq X_1 \leq 3,5]$ .
15. Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, ambas de média nula e variância unitária. Seja  $\rho = \rho_{X,Y}$  o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$ . Assuma que  $|\rho| < 1$ .
- (a) Determine a função densidade de probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$ . (1,0)
- (b) Considere as variáveis aleatórias  $U = X + Y$  e  $V = Y - X$ . Calcule a média e a variância de  $U$  e  $V$ . São  $U$  e  $V$  dependentes ou independentes? Justifique.
- (c) Baseado no item anterior, encontre uma transformação linear que, quando aplicada ao vetor  $[X \ Y]^T$ , forneça um vetor  $[\bar{X} \ \bar{Y}]^T$  tal que  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  sejam conjuntamente gaussianas, independentes, ambas de média nula e variância unitária.

## Exercícios complementares

1. Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $p$  um número real tal que  $0 \leq p \leq 1$ . Uma variável aleatória binomial  $X$  com parâmetros  $n$  e  $p$  tem a seguinte PMF:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

onde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

é o coeficiente binomial (daí o nome da distribuição). Alternativamente, a variável aleatória  $X$  pode ser expressa como

$$X = B_1 + \cdots + B_n, \quad (2)$$

onde  $B_1, \dots, B_n$  são variáveis aleatórias independentes, todas distribuídas de acordo com a distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ , isto é,

$$p_{B_i}(b) = \begin{cases} 1 - p, & \text{se } b = 0, \\ p, & \text{se } b = 1, \end{cases}$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

- (a) Determine a média de  $X$ .
- (b) Determine a variância de  $X$ .

*Sugestão:* Utilize a Equação (2), e não a Equação (1)!

2. [1, Exercício 5.5] Considere uma variável aleatória  $U$  uniformemente distribuída em  $[-1, 1]$ . Considere ainda duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , definidas por  $X = U^2$  e  $Y = U^3$ .
  - (a) Mostre que  $X$  e  $Y$  são descorrelacionadas.
  - (b) Mostre que  $E[X^2Y^2] \neq E[X^2]E[Y^2]$  e conclua que  $X$  e  $Y$  não são independentes.

3. A covariância entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é definida como

$$\text{cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

onde  $\mu_X = E[X]$  e  $\mu_Y = E[Y]$ .

- (a) Mostre que  $\text{cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ .
- (b) Mostre que  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] + 2\text{cov}[X, Y]$ .
- (c) Mostre que a covariância é *bilinear*, isto é, é linear em ambos os argumentos:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha \text{cov}[X, Z] + \beta \text{cov}[Y, Z], \\ \text{cov}[X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha \text{cov}[X, Y] + \beta \text{cov}[X, Z], \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes e  $X, Y, Z$  são variáveis aleatórias. (É necessário apenas mostrar a primeira linha; a segunda linha segue de modo similar.)

- (d) Utilize o item anterior para mostrar que, se  $Y = aX + b$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes, então o coeficiente de correlação

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X] \text{var}[Y]}}$$

vale  $+1$  ou  $-1$ .

## Referências

- [1] J. P. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*. Editora Interciência, 2008.
- [2] P. L. O. Costa Neto and M. Cymbalista, *Probabilidades*, 2nd ed. Editora Edgard Blücher, 2006.
- [3] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB<sup>®</sup>*. Springer, 2006.

## Respostas

1. (a)  $p$  e  $p(1-p)$ . (b)  $\frac{a+b}{2}$  e  $\frac{(b-a)^2}{12}$ . (c)  $\frac{1}{p}$  e  $\frac{1-p}{p^2}$ . (d)  $\frac{1}{\lambda}$  e  $\frac{1}{\lambda^2}$ . (e)  $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  e  $\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$ . (f)  $0$  e  $2b^2$ .
2. 7,5 s.
3.  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{30}$  e  $\frac{1}{180}$ .
4.  $E[Y^2] = 2$ .
5.  $E[X] = E[X | Y = 1] = \frac{2}{3}$ ,  $E[Y] = E[Y | X = 1] = \frac{3}{2}$ .
6. (a)  $k = 1$ . (b)  $\vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 7/12 \\ 7/12 \end{bmatrix}$ . (c)  $K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 11/144 & -1/144 \\ -1/144 & 11/144 \end{bmatrix}$ .
7. (a)  $\vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ . (b)  $K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{bmatrix}$ .
8.  $\vec{\mu}_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $K_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}$ .
9. (a)  $E[X] = E[Y] = 0$ . (b)  $\text{var}[X] = 25$  e  $\text{var}[Y] = 5$ .  
(c)  $\text{cov}[X, Y] = 2$ . (d)  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot 11} \exp\left(-\frac{1}{242}[5x^2 + 25y^2 - 4xy]\right)$ .
10.  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{9/2}} \exp\left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}y^2 + \frac{\sqrt{6}}{9}xy\right)$ .  
Quando  $\rho_{X,Y} \rightarrow 1$ , a matriz  $K_{X,Y}$  torna-se singular (não-inversível). Nesse caso,  $X$  e  $Y$  satisfazem a seguinte relação linear:  $Y = \sqrt{3}/2X$ .
11. (a)  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)\sigma_X^2\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$ .  
(b)  $f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2}\left[x - \mu_X - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho(y - \mu_Y)\right]^2\right)$ .
12. (a)  $f_{\bar{X}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot 6} \exp\left(-\frac{5}{12}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{12}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2\right)$ .  
(b)  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 72}} \exp\left(-\frac{1}{144}y^2\right)$ .  
(c)  $f_{\bar{Z}}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot 108} \exp\left(-\frac{1}{72}z_1^2 - \frac{5}{72}z_2^2 - \frac{1}{9}z_3^2 - \frac{1}{18}z_1z_2 - \frac{1}{18}z_1z_3 - \frac{1}{9}z_2z_3\right)$ .  
(d)  $f_{X_1|X_2=\alpha}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 6/5}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 6/5}[x_1 - \frac{3}{5}\alpha]^2\right)$ .
13.  $f_{X_1, X_2|X_3=\alpha, X_4=\beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-[x_1 - 1]^2 - \frac{1}{2}[x_2 - 1]^2 + [x_1 - 1][x_2 - 1]\right)$ .

14. (a)  $f_{X_1, X_3}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi \cdot 3} \exp\left(-\frac{1}{18}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2\right)$ .  
(b)  $\Pr[0 \leq X_3 \leq 2 \mid 3 \leq X_1 \leq 3,5] = \Phi(2) - \frac{1}{2} \approx 0,47725$ .
15. (a)  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$ .  
(b)  $\mu_U = \mu_V = 0$ ,  $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 2$ .  $U$  e  $V$  são independentes. (c) (Em breve.)