



## VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS CONJUNTAS

1. (4,0) Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja  $X$  a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e  $Y$  a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra.
  - (a) Determine a PDF marginal de  $X$ , isto é,  $f_X(x)$ .
  - (b) Determine a PDF condicional de  $Y$  dado  $X = x_0$ , isto é,  $f_{Y|X=x_0}(y)$ .
  - (c) Determine a PDF conjunta de  $X$  e  $Y$ , isto é,  $f_{X,Y}(x, y)$ .
  - (d) Determine a PDF marginal de  $Y$ , isto é,  $f_Y(y)$ .
  - (e) Determine a PDF condicional de  $X$  dado  $Y = y_0$ , isto é,  $f_{X|Y=y_0}(x)$ .
  - (f) Determine a probabilidade de  $X$  ser menor que  $1/2$ . Determine a probabilidade de  $Y$  ser menor que  $1/2$ .
  - (g) Determine os valores médios de  $X$  e de  $Y$ .
  - (h) Calcule a probabilidade de que um triângulo possa ser formado com as três peças obtidas. (Lembre-se de que, num triângulo, o comprimento de qualquer um dos lados é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.)
  
2. (2,0) Utilize um computador para simular o experimento probabilístico da Questão 1 um total de 100 000 vezes. Em seguida:
  - (a) Plote o diagrama de dispersão (*scatter plot*) de  $(X, Y)$ , utilizando as 5000 primeiras realizações do experimento.
  - (b) Plote, em uma mesma figura, a PDF marginal teórica e prática de  $X$ .
  - (c) Plote, em uma mesma figura, a PDF marginal teórica e prática de  $Y$ .
  - (d) Verifique os resultados das Questões 1(f) a 1(h).
  
3. (1,0) Para ambas as simulações abaixo, utilize um total de 10 000 realizações.
  - (a) Reescreva o programa escrito na Questão 2 para estimar a PDF condicional de  $X$  dado  $Y = y_0$ . Em seguida, plote, em uma mesma figura, a PDF condicional estimada, juntamente com a PDF condicional teórica obtida na Questão 1(e). Utilize  $y_0 \in \{0,1; 0,25; 0,75; 0,9\}$ . Sugestão: utilize `subplot(2,2,i)`.

- (b) Reescreva o programa escrito na Questão 2 para estimar a PDF condicional de  $Y$  dado  $X = x_0$ . Em seguida, plote, em uma mesma figura, a PDF condicional estimada, juntamente com a PDF condicional teórica obtida na Questão 1(b). Utilize  $x_0 \in \{0,1; 0,25; 0,75; 0,9\}$ . Sugestão: utilize `subplot(2,2,i)`.
4. (1,0) Considere um quadrado de lado unitário. Dois pontos são escolhidos aleatoriamente dentro do quadrado, de maneira uniforme e independente. Seja  $R$  a variável aleatória que representa a distância entre os dois pontos. Determine
- (a) A média de  $D$ .
  - (b) A variância de  $D$ .
5. (2,0) Utilize um computador para simular o experimento probabilístico da Questão 4 um total de 100 000 vezes. Em seguida:
- (a) Plote a PDF marginal prática de  $D$ .
  - (b) Plote a CDF marginal prática de  $D$ .
  - (c) Estime a probabilidade de  $D$  ser menor que 1.
  - (d) Verifique os resultados da Questão 4.