INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
COORDENADORIA DE ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS: MÓDULO #4

1 Cadeias de Markov

Definição

Uma *cadeia de Markov* é uma sequência de VAs

$$X_0, X_1, X_2, \ldots \tag{1}$$

(isto é, um PE de tempo discreto) com a chamada *propriedade de Markov*:

$$\boxed{\Pr\left[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_N = x_n\right] = \Pr\left[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_N = x_n\right].} \tag{2}$$

Em outras palavras, o próximo valor (X_{n+1}) depende apenas do valor atual (X_n), sendo *condicionalmente independente* dos valores passados ($X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$).

Nesta disciplina, serão consideradas apenas cadeias de Markov "homogêneas":

Definição

Uma cadeia de Markov é dita ser *homogênea* se a probabilidade condicional

$$\Pr\left[X_{n+1} = s_i \mid X_n = s_j\right] \tag{3}$$

é independente do tempo n.

Definição

O *espaço de estados* de uma cadeia de Markov, denotado por

$$\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}, \tag{4}$$

é o conjunto de valores que X_n pode assumir.

Nomenclatura

- Um *vetor de probabilidade* é um vetor linha cujos elementos estão todos entre 0 e 1 e cuja soma é igual a 1.
- Uma *matriz estocástica* é uma matriz cujas linhas são vetores de probabilidade.

No caso em que o espaço de estados $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ é um conjunto finito, a cadeia de Markov é completamente especificada pelo seguinte:

1. A *PMF inicial*

$$\vec{q}_0 = \begin{bmatrix} \Pr[X_0 = s_1] & \Pr[X_0 = s_2] & \cdots & \Pr[X_0 = s_r] \end{bmatrix},$$

   que é um vetor de probabilidade de dimensão $1 \times r$.

2. A *matriz de transição*

$$P = \begin{bmatrix} \Pr[X_{n+1} = s_1 \mid X_n = s_1] & \Pr[X_{n+1} = s_1 \mid X_n = s_2] & \cdots & \Pr[X_{n+1} = s_1 \mid X_n = s_r] \\ \Pr[X_{n+1} = s_2 \mid X_n = s_1] & \Pr[X_{n+1} = s_2 \mid X_n = s_2] & \cdots & \Pr[X_{n+1} = s_2 \mid X_n = s_r] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr[X_{n+1} = s_r \mid X_n = s_1] & \Pr[X_{n+1} = s_r \mid X_n = s_2] & \cdots & \Pr[X_{n+1} = s_r \mid X_n = s_r] \end{bmatrix}.$$

   que é uma matriz estocástica de dimensão $r \times r$.

Exemplo: Terra de Oz

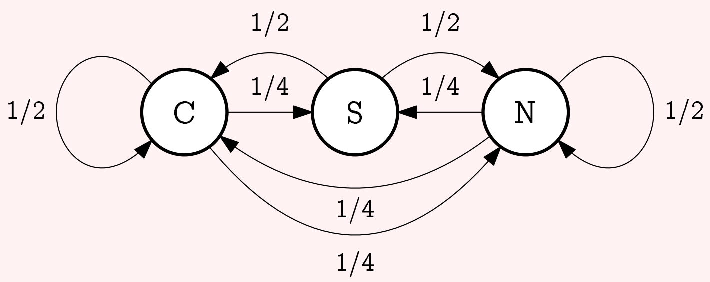
Na Terra de Oz, o dia pode ser ensolarado (S), chuvoso (C) ou com neve (N). O tempo obedece às seguintes regras:

- O dia da criação foi ensolarado.
- Nunca há dois dias ensolarados em seguida. Mais precisamente, se o dia atual é ensolarado, então o dia seguinte será chuvoso ou com neve, com igual probabilidade.
- Se o dia atual é chuvoso ou com neve, então: Em metade dos casos, o dia seguinte permanecerá igual; Na outra metade dos casos, há mudança para algum outro estado, com igual probabilidade.

Definindo o espaço de estados como $\mathcal{S} = \{C, S, N\}$, temose que a PMF inicial e a matriz de transição são, respectivamente,

$$\vec{q}_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & S & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & S & N \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ S \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

O *diagrama de estados* da cadeia é mostrado abaixo.



PMF marginal de uma cadeia de Markov

Como determinar a PMF de X_n conhecendo a PMF inicial e a matriz de transição?

Teorema

Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Então, o vetor $\vec{q}_n$ que representa a PMF de X_n é dado por

$$\boxed{\vec{q}_n = \vec{q}_{n-1} P = \vec{q}_0 P^n.} \tag{5}$$

Prova: Usar o teorema da probabilidade total.

Comportamento assintótico de uma cadeia de Markov

Definição

Um vetor de probabilidade $\vec{\pi}$ é dito ser um *vetor de equilíbrio* de uma cadeia de Markov se

$$\vec{\pi} P = \vec{\pi}. \tag{6}$$

Exemplo: Terra de Oz

Na Terra de Oz, $\vec{\pi} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$ é um vetor de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar que toda cadeia de Markov possui pelo menos um vetor de equilíbrio.

Definição

Uma matriz de transição P é dita ser *regular* se alguma potência P^k possui todos os elementos estritamente positivos.

Exemplo: Terra de Oz

A matriz de transição da Terra de Oz é regular, pois

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.4375 & 0.1875 & 0.375 \\ 0.375 & 0.25 & 0.375 \\ 0.375 & 0.1875 & 0.4375 \end{bmatrix}.$$

Teorema

Toda cadeia de Markov com matriz de transição regular possui um único vetor de equilíbrio $\vec{\pi}$, dada pelo solução única do sistema

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\pi} P = \vec{\pi}, \\ \vec{\pi} \vec{1} = 1, \end{cases}} \tag{7}$$

onde $\vec{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$. Além disso:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \vec{q}_n = \vec{\pi},} \tag{8}$$

qualquer que seja a PMF inicial $\vec{q}_0$.

2 Cadeias de Markov absorventes

Definição: Estado absorvente

Um estado s_i é dito ser *absorvente* se

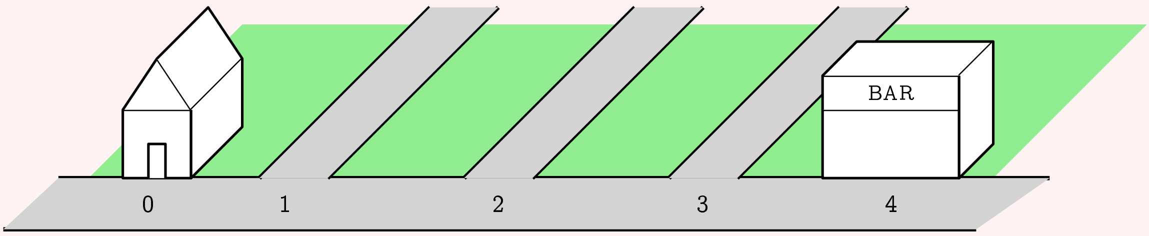
$$\Pr\left[X_{n+1} = s_i \mid X_n = s_i\right] = 1. \tag{9}$$

Definição: Cadeia absorvente

Uma cadeia de Markov é dita ser *absorvente* se possuir pelo menos um estado absorvente, sendo estes alcançáveis a partir de todos os estados não-absorventes.

Exemplo: Bêbado

Um bêbado caminha em uma avenida com quatro blocos.

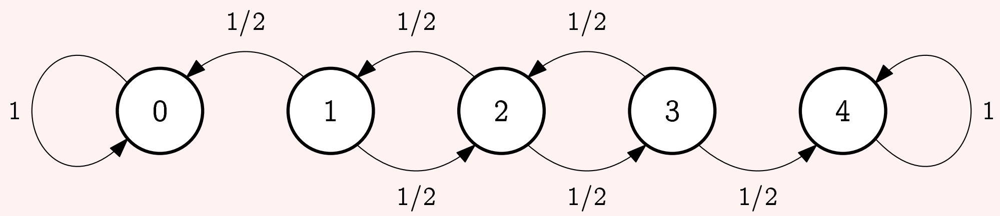


Quando ele se encontra em algum cruzamento (1, 2 ou 3), ele anda para esquerda ou para a direita, com igual probabilidade. Se ele chegar em casa (0) ou no bar (4), ele permanecerá lá para sempre.

Espaço de estados:

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Diagrama de estados:



Matriz de transição:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Os estados 0 e 4 são absorventes.

Teorema

Em uma cadeia de Markov absorvente, o processo será absorvido com probabilidade 1.

Perguntas naturais:

- Qual a probabilidade de absorção associada a cada estado absorvente?
- Qual o tempo médio para que o processo seja absorvido?
- Quantas vezes, em média, o processo transitará por um dado estado transiente antes de ser absorvido?

Forma canônica

Reordene os estados: Primeiros: t estados transientes. Últimos: r estados absorventes. Matriz resultante:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

Exemplo: Bêbado

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Teorema 1

O nº médio de vezes que o processo, iniciando no estado s_i, transita pelo estado s_j, é dado pelo elemento (i, j) da matriz

$$N = (I - Q)^{-1}.$$

Exemplo: Bêbado

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Teorema 2

O tempo médio para que o processo, iniciando no estado s_i, seja absorvido, é dado pela soma dos elementos da linha i da matriz N. Em outras palavras, é o elemento i do vetor

$$\vec{t} = N \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Bêbado

$$\vec{t} = N \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3

A probabilidade de que, iniciando no estado s_i, o processo seja absorvido no estado s_j, é dada pelo elemento (i, j) da matriz

$$B = NR.$$

Exemplo: Bêbado

$$B = NR = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$