

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS: MÓDULO #4

1 Cadeias de Markov

Definição

Uma *cadeia de Markov* é uma sequência de VAs

$$X_0, X_1, X_2, \dots \quad (1)$$

(isto é, um PE de tempo discreto) com a chamada *propriedade de Markov*:

$$\Pr [X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_N = x_n] = \Pr [X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]. \quad (2)$$

Em outras palavras, o próximo valor (X_{n+1}) depende apenas do valor atual (X_n), sendo *condicionalmente independente* dos valores passados (X_1, X_2, \dots, X_{n-1}).

Nesta disciplina, serão consideradas apenas cadeias de Markov “homogêneas”:

Definição

Uma cadeia de Markov é dita ser *homogênea* se a probabilidade condicional

$$\Pr [X_{n+1} = s_i \mid X_n = s_j] \quad (3)$$

é independente do tempo n .

Definição

O *espaço de estados* de uma cadeia de Markov, denotado por

$$\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}, \quad (4)$$

é o conjunto de valores que X_n pode assumir.

Nomenclatura

- Um *vetor de probabilidade* é um vetor linha cujos elementos estão todos entre 0 e 1 e cuja soma é igual a 1.
- Uma *matriz estocástica* é uma matriz cujas linhas são vetores de probabilidade.

No caso em que o espaço de estados $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ é um conjunto finito, a cadeia de Markov é completamente especificada pelo seguinte:

1. A PMF inicial

$$\vec{q}_0 = \left[\Pr[X_0 = s_1] \quad \Pr[X_0 = s_2] \quad \cdots \quad \Pr[X_0 = s_r] \right],$$

que é um vetor de probabilidade de dimensão $1 \times r$.

2. A matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} \Pr[X_{n+1} = s_1 | X_n = s_1] & \Pr[X_{n+1} = s_1 | X_n = s_2] & \cdots & \Pr[X_{n+1} = s_1 | X_n = s_r] \\ \Pr[X_{n+1} = s_2 | X_n = s_1] & \Pr[X_{n+1} = s_2 | X_n = s_2] & \cdots & \Pr[X_{n+1} = s_2 | X_n = s_r] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr[X_{n+1} = s_r | X_n = s_1] & \Pr[X_{n+1} = s_r | X_n = s_2] & \cdots & \Pr[X_{n+1} = s_r | X_n = s_r] \end{bmatrix}.$$

que é uma matriz estocástica de dimensão $r \times r$.

Exemplo: Terra de Oz

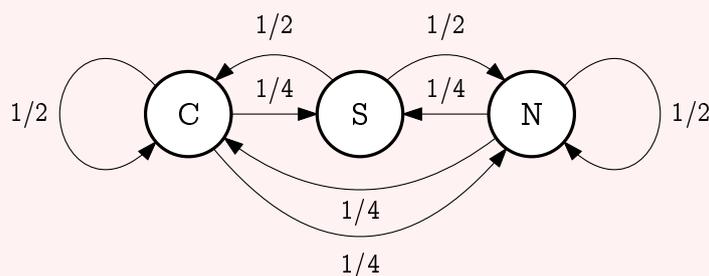
Na Terra de Oz, o dia pode ser ensolarado (S), chuvoso (C) ou com neve (N). O tempo obedece às seguintes regras:

- O dia da criação foi ensolarado.
- Nunca há dois dias ensolarados em seguida. Mais precisamente, se o dia atual é ensolarado, então o dia seguinte será chuvoso ou com neve, com igual probabilidade.
- Se o dia atual é chuvoso ou com neve, então: Em metade dos casos, o dia seguinte permanecerá igual; Na outra metade dos casos, há mudança para algum outro estado, com igual probabilidade.

Definindo o espaço de estados como $S = \{C, S, N\}$, temose que a PMF inicial e a matriz de transição são, respectivamente,

$$\vec{q}_0 = \begin{matrix} & C & S & N \\ \begin{matrix} C \\ S \\ N \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad e \quad P = \begin{matrix} & C & S & N \\ \begin{matrix} C \\ S \\ N \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

O *diagrama de estados* da cadeia é mostrado abaixo.



PMF marginal de uma cadeia de Markov

Como determinar a PMF de X_n conhecendo a PMF inicial e a matriz de transição?

Teorema

Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Então, o vetor \vec{q}_n que representa a PMF de X_n é dado por

$$\vec{q}_n = \vec{q}_{n-1}P = \vec{q}_0P^n. \quad (5)$$

Prova: Usar o teorema da probabilidade total.

Comportamento assintótico de uma cadeia de Markov

Definição

Um vetor de probabilidade $\vec{\pi}$ é dito ser um *vetor de equilíbrio* de uma cadeia de Markov se

$$\vec{\pi}P = \vec{\pi}. \quad (6)$$

Exemplo: Terra de Oz

Na Terra de Oz, $\vec{\pi} = [2/5 \ 1/5 \ 2/5]$ é um vetor de equilíbrio:

$$[2/5 \ 1/5 \ 2/5] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = [2/5 \ 1/5 \ 2/5].$$

Pode-se mostrar que toda cadeia de Markov possui pelo menos um vetor de equilíbrio.

Definição

Uma matriz de transição P é dita ser *regular* se alguma potência P^k possui todos os elementos estritamente positivos.

Exemplo: Terra de Oz

A matriz de transição da Terra de Oz é regular, pois

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.4375 & 0.1875 & 0.375 \\ 0.375 & 0.25 & 0.375 \\ 0.375 & 0.1875 & 0.4375 \end{bmatrix}.$$

Teorema

Toda cadeia de Markov com matriz de transição regular possui um único vetor de equilíbrio $\vec{\pi}$, dada pelo solução única do sistema

$$\begin{cases} \vec{\pi} P = \vec{\pi}, \\ \vec{\pi} \vec{1} = 1, \end{cases} \quad (7)$$

onde $\vec{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$. Além disso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{q}_n = \vec{\pi}, \quad (8)$$

qualquer que seja a PMF inicial \vec{q}_0 .

2 Cadeias de Markov absorventes

Definição: Estado absorvente

Um estado s_i é dito ser *absorvente* se

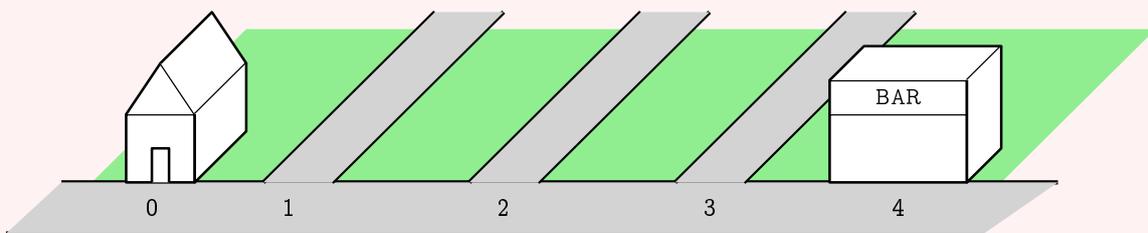
$$\Pr [X_{n+1} = s_i | X_n = s_i] = 1. \quad (9)$$

Definição: Cadeia absorvente

Uma cadeia de Markov é dita ser *absorvente* se possuir pelo menos um estado absorvente, sendo estes alcançáveis a partir de todos os estados não-absorventes.

Exemplo: Bêbado

Um bêbado caminha em uma avenida com quatro blocos.

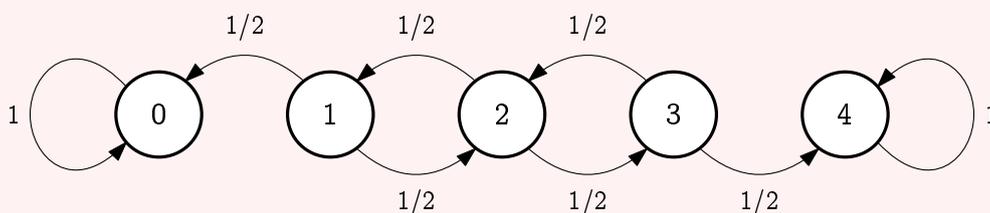


Quando ele se encontra em algum cruzamento (1, 2 ou 3), ele anda para esquerda ou para a direita, com igual probabilidade. Se ele chegar em casa (0) ou no bar (4), ele permanecerá lá para sempre.

Espaço de estados:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Diagrama de estados:



Matriz de transição:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Os estados 0 e 4 são absorventes.

Teorema

Em uma cadeia de Markov absorvente, o processo será absorvido com probabilidade 1.

Perguntas naturais:

- Qual a probabilidade de absorção associada a cada estado absorvente?
- Qual o tempo médio para que o processo seja absorvido?
- Quantas vezes, em média, o processo transitará por um dado estado transiente antes de ser absorvido?

Forma canônica

Reordene os estados: Primeiros: t estados transientes. Últimos: r estados absorventes.

Matriz resultante:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

Exemplo: Bêbado

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right. \\ 2 & \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right. \\ 3 & \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \hline 0 & \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right. \\ 4 & \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right. \end{array} \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right. \\ 2 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ 3 & \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right. \end{array} \end{array} \quad e \quad R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \\ 1 & \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right. \\ 2 & \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right. \\ 3 & \left[\begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{array} \end{array}$$

Teorema 1

O nº médio de vezes que o processo, iniciando no estado s_i , transita pelo estado s_j , é dado pelo elemento (i, j) da matriz

$$N = (I - Q)^{-1}.$$

Exemplo: Bêbado

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \left[\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right. \\ 2 & \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ 3 & \left[\begin{array}{ccc} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right. \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ 2 & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \end{array} \right. \\ 3 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right. \end{array} \end{array}$$

Teorema 2

O tempo médio para que o processo, iniciando no estado s_i , seja absorvido, é dado pela soma dos elementos da linha i da matriz N . Em outras palavras, é o elemento i do vetor

$$\vec{t} = N \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Bêbado

$$\vec{t} = N \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3

A probabilidade de que, iniciando no estado s_i , o processo seja absorvido no estado s_j , é dada pelo elemento (i, j) da matriz

$$B = NR.$$

Exemplo: Bêbado

$$B = NR = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$