Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal De Santa Catarina
Campus São José

Professora: ELENIRA OLIVEIRA VILELA
COMPONENTE CURRICULAR: ALG – ÁLG. LINEAR

MATRIZES E OPERAÇÕES

Uma matriz é uma tabela com m linhas e n colunas em que cada elemento é identificado pelos índices da linha e da coluna. Assim o elemento a_{ij} é encontrado no cruzamento da linha i com a coluna j, ou seja, o primeiro índice se refere à linha e o segundo à coluna.

$$\begin{array}{rcccccc} coluna \rightarrow & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ linha \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \rightarrow \\ 2 \rightarrow \\ 3 \rightarrow \\ \vdots \\ m \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dimensão: uma matriz de dimensão $m \times n$ [m por n] possui m linhas e n colunas. O elemento A_{ij} está no encontro da i-ésima linha com a j-ésima coluna.

Matriz NULA: $O_{m\times n} / O_{ij} = 0 \quad \forall i, j$, ou seja, todos os elementos são nulos.

Matriz COLUNA: $C_{m\times 1}$ tem apenas uma coluna e m linhas.

Matriz LINHA: $L_{1\times n}$ tem apenas uma linha e n colunas.

Matriz QUADRADA: se $n = m$, A é uma matriz quadrada A_{mm} de ordem m.

Matrizes quadradas especiais:

1. DIAGONAL: $D_{ij} = 0 \quad se\, i \neq j$, já D_{ii} pode tomar qualquer valor.
2. IDENTIDADE: Matriz diagonal na qual $I_{ij}^{(n)}$, na qual $a_{ii} = 1$, n denota a ordem da matriz quadrada. Ou seja, é uma matriz com todos os elementos da diagonal iguais a UM e todos os elementos fora da diagonal iguais a ZERO.
3. Matriz TRIANGULAR SUPERIOR: $\Delta_{ij}^{+} = 0 \quad se \quad i > j$, ou seja, todos os elementos abaixo da diagonal são NULOS.
4. Matriz TRIANGULAR INFERIOR: $\Delta_{ij}^{-} = 0 \quad se \quad i < j$, ou seja, todos os elementos acima da diagonal são NULOS.
5. Matriz SIMÉTRICA: $S_{ij} = S_{ji}$
6. Matriz ANTISSIMÉTRICA: $A_{ij} = -A_{ji}$

IGUALDADE DE MATRIZESS: $A=B$ se, e somente se, $A_{ij}=B_{ij} \quad \forall ij$.

Os elementos da diagonal de uma matriz antissimétrica são nulos:

$$A_{ii}=-A_{ii} \quad \rightarrow \quad 2A_{ii}=0 \quad \rightarrow \quad A_{ii}=0.$$

Operação ADIÇÃO: essa operação sobre ser efetuada sobre matrizes de mesma dimensões, $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$, e é definida como $\left(A+B\right)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$.

Propriedades da operação ADIÇÃO de matrizes:

a. $A+B=B+A$ pois $A_{ij}+B_{ij}=B_{ij}+A_{ij}$ ou seja é comutativa frente à adição.

b. $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$ pois $A_{ij}+\left(B_{ij}+C_{ij}\right)=\left(A_{ij}+B_{ij}\right)+C_{ij}$, ou seja, é distributiva.

c. $A+O=A$, a matriz nula é o elemento unitário da operação adição de matrizes.

Operação MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR: $\left(aA\right)_{ij}=aA_{ij}$, ou seja, todos os elementos da matriz são multiplicados pelo escalar (número) a.

Propriedades da operação multiplicação por escalar:

1. $k\left(A+B\right)=kA+kB$ distributiva
2. $\left(k_1+k_2\right)A=k_1A+k_2A$
3. $0A=O$ é uma matriz nula
4. $k_1\left(k_2A\right)=\left(k_1k_2\right)A$

Operação **TRANSPOSTA** é denotada por $\overline{A}=A'$, e é definida por $\overline{A}_{ij}=A_{ji}$. Ou seja, essa operação troca linhas por colunas. Matriz simétrica tem a propriedade: $\overline{S}=S$. Note que nesse caso a matriz S é obrigatoriamente quadrada.

Propriedades da operação Transposta:

1. $\overline{\overline{A}}=A$, pois $\overline{A_{ij}}=A_{ji}$ logo $\left(\overline{\overline{A}}\right)_{ij}=\overline{A_{ji}}=A_{ij}$.
2. $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$, pois $\left(\overline{A+B}\right)_{ij}=\left(A+B\right)_{ji}=A_{ji}+B_{ji}=\left(\overline{A}\right)_{ij}+\left(\overline{B}\right)_{ij}=\left(\overline{A}+\overline{B}\right)_{ij}$.
3. $\overline{kA}=k\,\overline{A}$
4. Se S é simétrica então $\overline{S}=S$, pois $\left(\overline{S}\right)_{ij}=S_{ji}=S_{ij}$.
5. Se A é antissimétrica então $\overline{A}=-A$, pois $\left(\overline{A}\right)_{ij}=A_{ji}=-A_{ij}$.

6. $B+\overline{B}=S$ é simétrica. $\overline{\left(B+\overline{B}\right)}=\overline{B}+\overline{\overline{B}}=\overline{B}+B=B+\overline{B}$, logo $\overline{\left(B+\overline{B}\right)}=\left(B+\overline{B}\right)$ é simétrica.
7. $B-\overline{B}=A$ é antissimétrica. $\overline{\left(B+\overline{B}\right)}=\overline{B}-\overline{\overline{B}}=\overline{B}-B=-\left(B-\overline{B}\right)$, logo $\overline{\left(B-\overline{B}\right)}=-\left(B-\overline{B}\right)$ é antissimétrica.
8. Toda matriz quadrada pode ser decomposta em uma matriz simétrica e uma antissimétrica.

Operação MULTIPLICAÇÃO de MATRIZES:

Só podemos, então, multiplicar duas matrizes A e B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. A operação **MULTIPLICAÇÃO** entre uma matriz de ordem $m\times n$ e outra de ordem $n\times p$ é definida por

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}\ ,$$

resultando em uma matriz de ordem $m\times p$. Note que o índice repetido da primeira matriz é o segundo, da coluna, e da segunda é o primeiro, o da linha. A regra para saber a dimensão da matriz multiplicação é cancelar a dimensão repetida, ou seja: $A_{m\times\underline{n}}B_{\underline{n}\times p}=C_{m\times p}$, ou seja, o n repetido desapareceu.

Propriedades da operação MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES.

1. Multiplicação pela matriz identidade: $AI=IA=A$, ou seja, a matriz identidade é o elemento unitário frente à operação multiplicação de matrizes. Prova: $\left(AI\right)_{ij}=\sum_{k}A_{ik}I_{kj}=\sum_{k}A_{ik}\delta_{kj}=A_{ij}=\left(A\right)_{ij}$, logo $AI=A$. Por outro lado $\left(IA\right)_{ij}=\sum_{k}I_{ik}A_{kj}=\sum_{k}\delta_{ik}A_{kj}=A_{ij}=\left(A\right)_{ij}$, logo $IA=A$.
2. $A\left(B+C\right)=AB+AC$ é distributiva à esquerda.
3. $\left(A+B\right)C=AC+BC$ é distributiva à direita.

Observações:

a. Em geral $AB\neq BA$, ou seja, a operação multiplicação não comuta. Existem que casos em que a operação AB está definida mas a operação BA não. Exemplo: $A_{m\times n}B_{n\times p}$ está definida pois o número n de colunas de A é igual ao de linhas de B, mas a operação $B_{n\times p}A_{m\times n}$ não se $p\neq m$. Para que as duas operações AB e BA sejam definidas é necessário que se A é $m\times n$ então B é $n\times m$. Mesmo nesse caso os produtos $A_{m\times n}B_{n\times m}=C_{m\times m}$ e $B_{n\times m}A_{m\times n}=D_{n\times n}$, sequer possuem a mesma dimensão., logo não podem ser iguais. Se $m=n$ então as duas matrizes terão as mesmas dimensões, mas ainda assim os produtos AB e BA, genericamente, são diferentes. Podem ser iguais apenas em certas condições especiais. Note a diferença entre os dois produtos: $\left(AB\right)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$ e $\left(BA\right)_{ij} = \sum_k A_{kj} B_{ik}$

b. Na álgebra de números reais sabemos que se $ab = 0$, então $a = 0$, ou $b = 0$, ou ainda $a = 0$ e $b = 0$. No entanto no produto de matrizes é possível que $AB = O$ e $A \neq O$ e $B \neq O$.

Veja o exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq O$ então:

$$AB = \begin{pmatrix} 1-2+1 & 2-4+1 & 3-6+3 \\ -3+4-1 & -6+8-2 & -9+12-3 \\ -2+2 & -4+4 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrizes Periódica, idempotente e nilpotente.

Uma matriz quadrada A é **PERIÓDICA** com período $p = n - 1$, $n \geq 2$, se $A^n = A$, onde $A^n = A\,A \cdots A$ é a matriz A multiplicada por si própria n vezes.

Uma matriz periódica com período 1, i.e., $A^2 = A$, é chamada **IDEMPOTENTE**.

Uma matriz quadrada A é **NILPOTENTE** de índice p se p é o menor inteiro tal que $A^p = O$.

DETERMINANTES

Determinantes são uma função que associa um número real à matrizes quadradas de números reais na forma $det(A): m\ x\ m \rightarrow \mathbb{R}$. A melhor forma de definir determinante é através dos tensores de Levi-Civita. Se você tiver interesse em conhecer essa definição veja o material original fonte desta revisão.

PROPRIEDADES DE DETERMINANTES

1. $\det\left(\overline{A}\right) = \det\left(A\right)$.

2. Se A' é obtida de A multiplicando a *i-ésima* linha (ou a *j-ésima* coluna) por α então $\det A' = \alpha \det A$.

Corolário: $\det\left(\alpha A\right) = \alpha^n \det\left(A\right)$.

3. Trocar duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz troca o sinal do determinante.

4. Se uma matriz tem uma linha (ou uma coluna) nula então $\det A = 0$.

5. Se duas linhas (ou colunas) de A são iguais então $\det A = 0$. Se duas linhas i e j são iguais, trocá-las não muda a matriz, i.e., $A' = A$. Por outro lado, pela propriedade (3) então $\det A' = -\det A \quad \rightarrow \det A = -\det A \quad \rightarrow 2\det A = 0 \quad \rightarrow \det A = 0$.

6. E duas linhas (ou duas colunas) de A são proporcionais então $\det A = 0$. Nesse caso $A_{ij} = kA'_{ij}$ onde a matriz A' possui duas linhas iguais, logo $\det A = k \det A' = k \times 0 = 0$.

7. Somar à uma linha um múltiplo de outra linha não altera o determinante.

8. $\det\left(AB\right) = \det A \times \det B$

9. Se a matriz A é diagonal ou triangular então $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii} = A_{11} A_{22} \cdots A_{nn}$.

Essa propriedade (9) é a base do método numérico de triangularização (escalonamento) da matriz, usando o fato de que operações elementares não alteram o determinante, mais eficiente para cálculo de determinantes.

Formalização de Matriz Inversa

1. Definição de matrizes SINGULAR e NÃO-SINGULAR. A matriz **A** é **SINGULAR** se $\det(A)=0$, e é **NÃO SINGULAR** se $\det(A)\neq 0$.

1.1. Divisores da matriz NULA: Se $AB=O$ então $A=O$ ou $B=O$ ou A e B, as duas, são matrizes singulares. Claro que se $A=O$ ou $B=O$ então $AB=O$. Mas estamos interessados no caso em que $A\neq O$, $B\neq O$ mas $AB=O$. Aplicando o determinante temos que $\det\left(AB\right)=\det A\times\det B=0$. Pareceria então que exigir que $\det A=0$ ou $\det B=0$ seria suficiente, mas essa caso é mais forte, os dois devem ser nulos. Suponha que $\det A\neq 0$ e $\det B=0$. Mas se $\det A\neq 0$ então A admite inversa, portanto $A^{-1}AB=A^{-1}O \quad \to B=O$ em contradição com $B\neq O$.

2. DEFINIÇÃO DE MATRIZ INVERSA. Se existir uma matriz X tal que $AX=I$ e que $XA=I$ então X é a matriz inversa de A, denotada por $X=A^{-1}$.

2.1. Se a inversa existe ela é única. Supor que existem duas diferentes, ou seja, $\exists Y\neq X \ / \ AY=I$. Mas $X=XI=X\left(AY\right)=\left(XA\right)Y=IY=Y$ ou seja $X=Y$ em contradição com $X\neq Y$. Logo a inversa, se existir, é única.

2.2. Se A admite inversa então A é não singular.

$AA^{-1}=I \quad \to\det\left(AA^{-1}\right)=\det I=1 \quad \to\det\left(A\right)\det\left(A^{-1}\right)=1$, logo $\det A\neq 0$ e $\det A^{-1}\neq 0$. Mais ainda $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$.

2.3. Vale também o converso, se A é não singular então A admite inversa.

Então podemos afirmar A admite inversa $\Leftrightarrow$ A é não singular.

Se A é singular, A não admite inversa, pois $\det\left(A\right)\det\left(A^{-1}\right)=1$ logo $0\times\det\left(A^{-1}\right)=1 \quad \Rightarrow 0=1$ gera uma contradição.

A é a inversa de A^{-1}. Pois $AA^{-1}=I \quad e \quad A^{-1}A=I$.

2.4. Se A é não singular, $\overline{A}$ também é não singular, pois $\det\overline{A}=\det A\neq 0$.

2.5. Se A e B são não singulares então AB é não singular, admite inversa e $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB.

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)\left(AB\right)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$$

2.6. Se A é não singular então $\left(\overline{A}\right)^{-1}=\overline{A^{-1}}$.

OPERAÇÕES ELEMENTARES:

São três as operações elementares sobre matrizes quadradas.

1. Multiplicar uma linha, ou uma coluna, por um escalar $\alpha \neq 0$. O determinante é multiplicado por α.
2. Permutar duas linhas, ou duas colunas. O determinante é multiplicado por -1.
3. Adicionar à uma linha, ou uma coluna, um múltiplo de outra linha, ou coluna. Nesse caso o determinante é preservado.

Matrizes equivalentes $\boldsymbol{A \sim B}$

Definição $A \sim B$:, A é equivalente à B, se B pode ser obtido de A através de uma cadeia de operações elementares.

Teoremas:

1. $A \sim A$.
2. Se $A \sim B$ então $B \sim A$.
3. Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.
4. Todas as matrizes quadradas não singulares podem ser expressas como um produto de matrizes elementares.

DETERMINAR A INVERSA DE UMA MATRIZ QUADRADA

1. Pela definição;

2. Método de Gauss:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Procura-se determinar a matriz inversa de A, a matriz A^{-1}. A ideia é completar a matriz da qual se procura a inversa com a matriz identidade de mesma ordem. Depois são realizadas operações elementares até que a matriz original seja transformada na matriz identidade. Cada operação elementar deve ser realizada com a identidade que foi colocada ao lado também. Quando isso estiver completo, no lugar que estava a matriz identidade estará a matriz A^{-1}.

Exemplo 1: achar inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Colocar as duas lado à lado:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \div 2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \times -4 \\ +linha1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +linha2 \\ \times 3/2 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \times -1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

3. Usando a matriz adjunta

Matriz adjunta é a transposta da Matriz de Cofatores. E a matriz de cofatores é a matriz obtida substituindo-se cada a_{ij} pelo cofator correspondente $\propto_{ij}= (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$, sendo M_{ij} o menor complementar.

Seja a matriz A de ordem n, dizemos então que $adj(A) = (\propto_{ij})_n$.

Se A é não singular, então $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$.

Ex: achar inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Usando a matriz adjunta sabemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{(10-12)} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrizes na forma escada reduzida por linha:

Uma matriz na forma escada reduzida obedece aos seguintes critérios:

1. O primeiro elemento não nulo de uma linha é 1.
2. Se A_{ij} é o primeiro elemento não nulo da linha i então $A_{ij} = 0 \quad \forall j \neq i$, ou seja, todos os elementos da coluna j , exceto A_{ij} , são nulos.
3. Todas as linhas nulas estão abaixo das linhas não nulas.
4. Se as linhas $1, 2, \cdots, p$ são não nulas e k_i é o primeiro elemento não nulo da linha i então $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$.

Teorema: Toda matriz $A_{m\times n}$ pode ser colocada na forma escada através de operações elementares.

A demonstração do teorema é a descrição do procedimento para atingir o objetivo – colocar a matriz na forma escada reduzida por linhas. O procedimento é o seguinte:

1. Suponha que já se colocou as $i-1$ linhas com primeiro elemento não nulo iguais à 1 e todo o resto da coluna desse elemento nula. Tome agora a linha i :
2. Se ela é nula nada precisa ser feito.
3. Se o primeiro elemento não nulo é o A_{ij} divida a linha por A_{ij} . Assim tornamos o primeiro elemento não nulo igual a 1. Falta anular todos os elementos da coluna j .
4. Some todos os elementos da linha $k \neq i$ com a linha i multiplicada por $\left(-A_{kj}\right)$. Assim anulamos todos os elementos da linha j exceto o $A_{ij} = 1$.
5. Repita o procedimento para as próximas linhas. Note que os zeros abaixo e acima do elemento igual a 1 não desfazem os 1 e zeros já obtidos.
6. Permute as linhas até colocar a matriz na forma escada.

Exemplo: colocar a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ na forma escada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \times 1/2 \\ \times 1/3 \\ \times 1/3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 1 & 0 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} -2\times linha3 \\ -2/3\times linha3 \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} trocar\ linha1 \\ com\ linha2 \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuidado para manter apenas operações de linhas, porque operações elementares de colunas podem gerar duas matrizes escadas (especialmente se sua intenção em transformar a matriz em escada for para resolver sistemas lineares associados). Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES

Definição

Representação matricial

Métodos de resolução

1. Adição

2. Substituição

3. Escalonamento

4. Regra de Cramer

5. Pela Matriz Inversa

Adaptado a partir de:

CÉSAR, Carlos Lenz. **Matrizes e Álgebra Linear vs 4**. Notas de aula do curso de Econofísica. UNICAMP. Disponível em http://www.ifi.unicamp.br/~lenz/Econofisica/. Acessado em 04/08/2017 às 10h45.