

# 1. FONTE SENOIDAL

## 1.1. Geração do Sinal Senoidal

A forma de onda senoidal (ou sinusoidal) ocorre naturalmente na natureza, como se pode observar nas ondas do mar, na propagação do som e da luz, no movimento de um pêndulo etc. e também é a forma mais eficiente de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica.

Nas duas últimas décadas do século XIX o uso de corrente contínua em sistemas de potência era defendido por Thomas Edison, enquanto a corrente alternada era proposta por Nikola Tesla e George Westinghouse Jr.

Uma função senoidal é facilmente obtida para geração de energia elétrica. Uma bobina sujeita a um campo magnético variável produz em seus terminais uma tensão elétrica segundo a seguinte equação (Lei de Faraday):

$$v(t) = -N \frac{d\phi(dt)}{dt}$$

Onde:  $v$  - tensão induzida [V]  
 $N$  - número de espiras  
 $\phi$  - fluxo magnético [Wb]

A estrutura a seguir apresenta esquematicamente a geração de um sinal senoidal a partir da movimentação do eixo de uma bobina submetida ao campo magnético de dois ímãs permanentes.

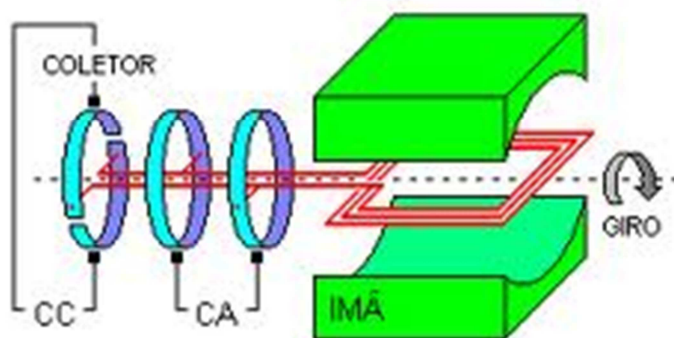


Figura 1 – Geração de um sinal senoidal.

Uma fonte de tensão ou corrente senoidal varia com o tempo e pode ser representada por uma senoide em função de sua frequência angular ( $\omega t$ ) ou em função do tempo ( $t$ ).

As formas de ondas seno e cosseno podem ser observadas na figura a seguir.

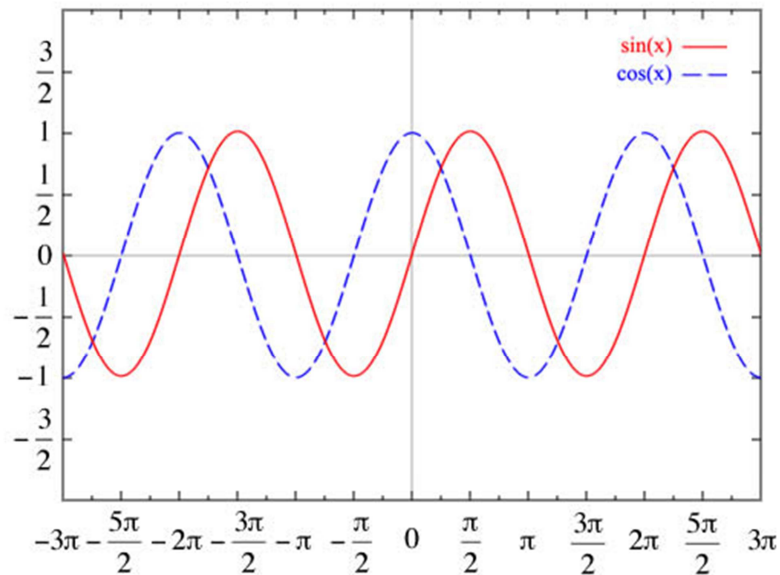


Figura 2 - Formas de ondas seno e cosseno.

## 1.2. Expressão Matemática do Sinal Senoidal

Todo sinal elétrico senoidal pode ter seu comportamento descrito de modo gráfico ou analítico através de uma função matemática senoidal, periódica e variante com o tempo. Adota-se para a representação dos sinais de tensão e de corrente alternada senoidal as seguintes expressões gerais:

$$v(\omega t) = V_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)$$

Onde:  $V_{m\acute{a}x}$  e  $I_{m\acute{a}x}$  - valores máximo, de pico ou amplitude  
 $\omega$  - frequência angular elétrica  
 $\theta$  - ângulo de fase

$$i(\omega t) = I_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

Na Figura 3 estão apresentados graficamente os principais parâmetros do sinal senoidal e, na sequência, suas definições.

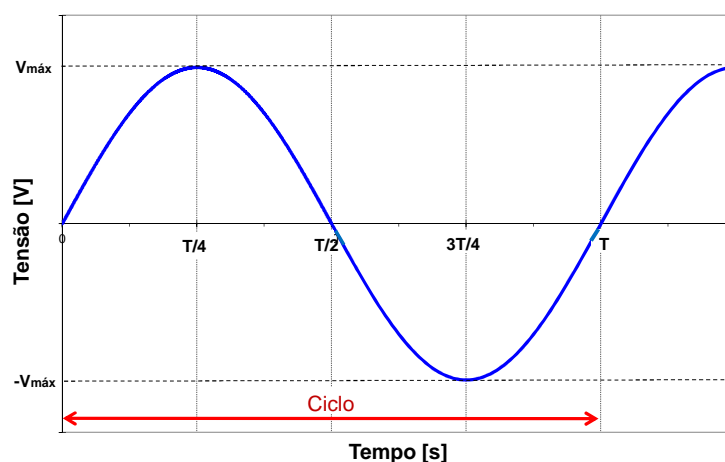


Figura 3 – Parâmetros do sinal senoidal.

- Valor máximo, de pico ou amplitude -  $V_{m\acute{a}x}$ ,  $V_p$  ou  $A$ : é o valor extremo alcançado pelo sinal.
- Período -  $T$  [s]: é o tempo decorrido na realização de um ciclo completo.

- Frequência -  $f$  [Hz] : é o número de ciclos realizados, na unidade de tempo, obtido por:

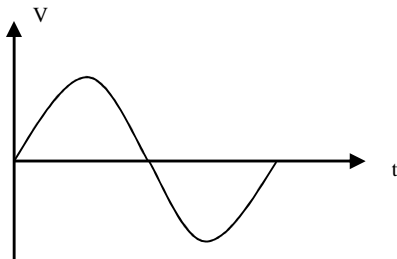
$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]}$$

Onde: 1 Hz = 1 ciclo / segundo

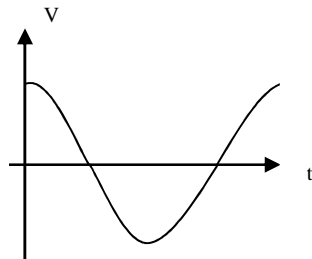
- Frequência angular elétrica -  $\omega$  [rad/s]: É a rapidez de variação do sinal. Ou seja, é a velocidade com que o sinal realiza um ciclo de variação, o que equivale realizar, num círculo, um arco de  $2\pi$  radianos ou  $360^\circ$ .
- Ângulo de fase -  $\theta$  [°] : É a posição relativa, expressa em grau, do sinal em relação a uma referência ou a outro sinal

Seu valor pode ser:

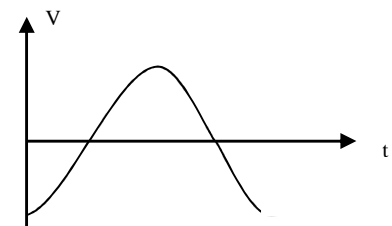
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta > 0^\circ \text{ (positivo) - sinal adiantado} \\ \theta = 0^\circ \text{ - sinal em fase} \\ \theta < 0^\circ \text{ (negativo) - sinal atrasado} \end{array} \right.$$



$\theta = 0^\circ$   
(em fase)



$\theta = +90^\circ$   
(adiantado)



$\theta = -90^\circ$   
(atrasado)

- Defasagem: É a diferença de fase entre dois sinais (**A e B**). Ou seja, é a medida do adiantamento, ou do atraso, de um sinal (**A**) em relação a outro sinal de referência (**B**)

$$\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B \quad \text{ou} \quad \theta_{BA} = \theta_B - \theta_A$$

Por exemplo:

$$\text{Se } v_A = 10 \cdot \text{sen}(200t + 30^\circ) \text{ [V]} \quad \text{e} \quad v_B = 100 \cdot \text{sen}(200t + 50^\circ) \text{ [V]}$$

$$\text{Então a defasagem entre "A" e "B" é: } \theta_{AB} = \theta_A - \theta_B = 30^\circ - 50^\circ = -20^\circ$$

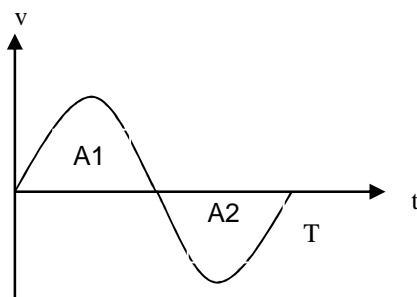
Note que o sinal menos significa dizer que "A" está atrasado de "B" de  $20^\circ$

- Valor médio -  $V_{\text{méd}}$  ou  $I_{\text{méd}}$  : É a média dos valores do sinal em um período. Esta média corresponde à área abaixo da curva do sinal dividida pelo seu período e é expressa por:

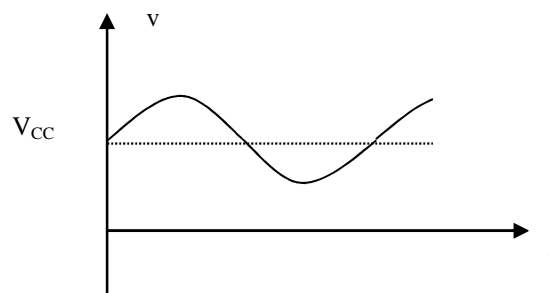
$$V_{\text{méd}} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

Existem duas situações práticas a serem consideradas:

a) Sinal CA "puro"



b) Sinal CA + CC



$$A1 = A2$$

$$V_{méd} = \frac{A1 - A2}{T} = 0$$

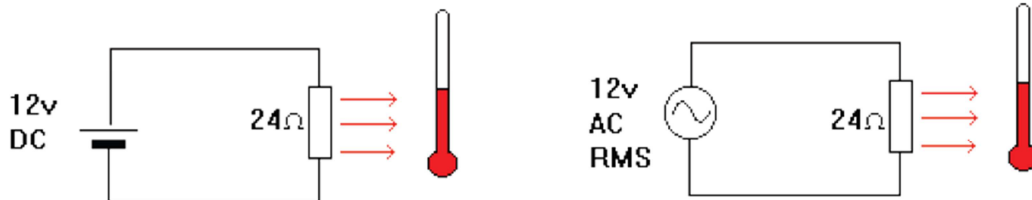
Valor médio é nulo.

$$V_{sinal} = V_{ca} + V_{cc}$$

$$V_{méd} = V_{méd CA} + V_{méd CC} = 0 + V_{cc}$$

O valor médio é a própria componente CC do sinal

- Valor eficaz: Como a forma de onda senoidal é pulsante sua energia não é transmitida de forma constante como acontece em corrente contínua. Para tensões variantes no tempo se pode obter um “valor efetivo” equivalente ao valor médio de uma fonte CC que demandaria a mesma potência elétrica.



O Valor Eficaz ( ou RMS - *root mean square* ) de uma função periódica é definido como a raiz quadrada do valor médio da função ao quadrado, ou em forma algébrica:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t)^2 dt}$$

Para uma onda senoidal pode ser demonstrado que o valor eficaz equivale a:

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Pela equação anterior note que o valor eficaz não depende da frequência nem do ângulo de fase, somente da amplitude do sinal.

Assim, por exemplo, na rede elétrica local 220 V é uma tensão eficaz, referente à tensão alternada senoidal em 60 Hz de valor de pico de 311,13 V. A representação matemática deste sinal é:

$$v(\omega t) = V_{máx} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)$$

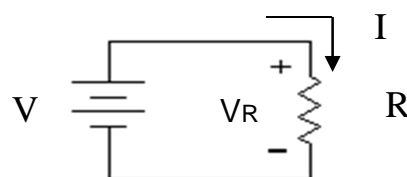
$$V_{máx} = 311,13 \text{ V} \quad - \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 377 \text{ rad/s} \quad - \quad \theta_v = 0^\circ \text{ - escolhido}$$

$$v(\omega t) = 311,13 \cdot \text{sen}(377t + 0^\circ)$$

## 2. Resposta senoidal do resistor

Em corrente contínua vimos que, no resistor, a tensão e a corrente se relacionam na forma:

$$I = \frac{V}{R} \text{ ou } V = R \cdot I$$



Em corrente alternada senoidal a relação é dada por:

Partindo-se de:

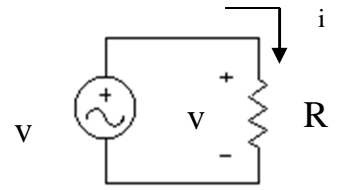
$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Substituindo  $v(t)$  tem-se:

$$i(t) = \frac{V_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)}{R}$$

Ou:

$$i(t) = \frac{I_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)}{R}$$

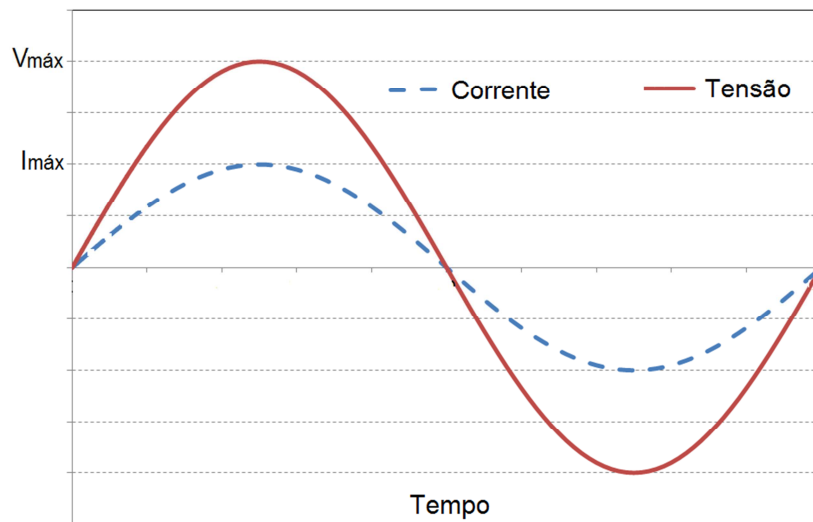


$$v(\omega t) = V_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)$$

Com no resistor a tensão e corrente estão em fase:

$$I_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{R} \quad \text{ou} \quad i(t) = I_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

Graficamente:



Considerando seus respectivos valores eficazes a relação fica:

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{R}$$

Em corrente alternada, como a tensão e a corrente se relaciona que em CC, ao se adotar valores eficazes as equações da potência elétrica são as mesmas.

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \quad \text{ou} \quad P = R \cdot I_{ef}^2 \quad \text{ou} \quad P = \frac{V_{ef}^2}{R}$$

No tempo tem-se a seguinte equação:  $p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_p \cdot I_p \cdot \text{sen}^2(\omega t)$

A potência dissipada no resistor será sempre positiva, como pode ser observado no gráfico a seguir:

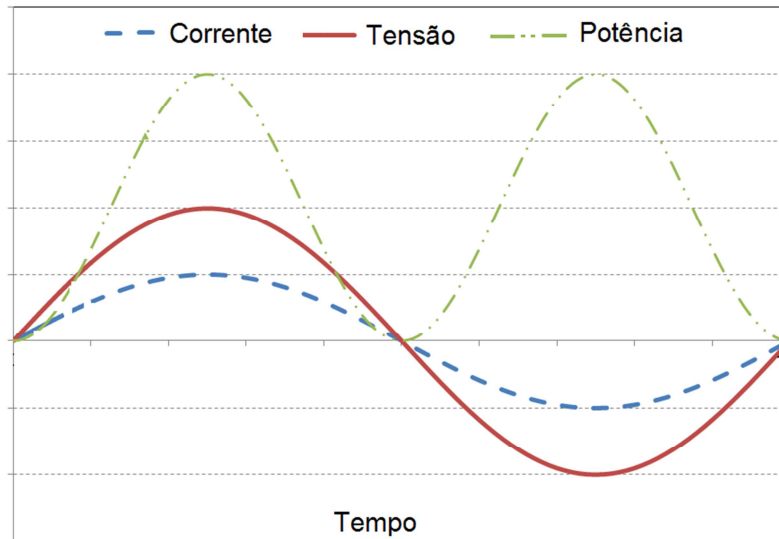


Figura 4 – Tensão, corrente e potência em um resistor.

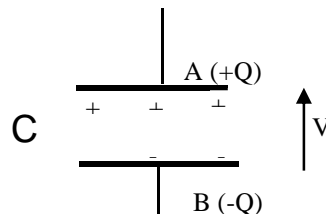
### 3. Elementos armazenadores de energia

Alguns elementos de circuitos elétricos podem armazenar energia em forma de campo elétrico ou magnético

#### 4.1. Capacitância

O capacitor é um elemento de circuito que possui a característica de conservar energia através do campo elétrico estabelecido entre suas placas, tendendo manter constante a tensão entre os seus terminais.

O capacitor é representado pela letra C e tem como unidade o Farad [F].



Em circuitos CC o capacitor funciona como um circuito aberto. Porém, em CA o capacitor exerce oposição à variação de tensão, fenômeno denominado reatância capacitiva, designada por  $X_c$ , medida em ohm [ $\Omega$ ] e expressa por:

$$X_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \text{ [}\Omega\text{]}$$

Para uma fonte senoidal a tensão no capacitor é expressa por:

$$V_c(t) = V_p \cdot \text{sen}(wt)$$

A corrente no capacitor será:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} = C \cdot w \cdot V_p \cdot \cos(wt) = C \cdot w \cdot V_p \cdot \text{sen}(wt + 90^\circ)$$

O capacitor atrasa a tensão em relação à corrente, conforme pode ser visto pela ilustração abaixo:

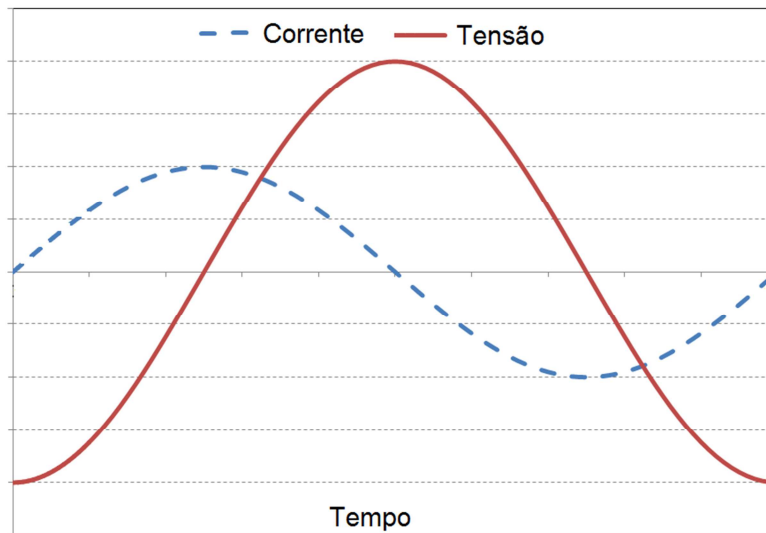


Figura 5 – Tensão e corrente em um capacitor.

Em um circuito puramente capacitivo não há dissipação de potência ativa. Como se pode observar na figura a seguir, em um período da rede elétrica, o valor médio da potência no capacitor é nulo. O capacitor armazena energia no primeiro semi-ciclo da rede devolvendo esta mesma energia no segundo.

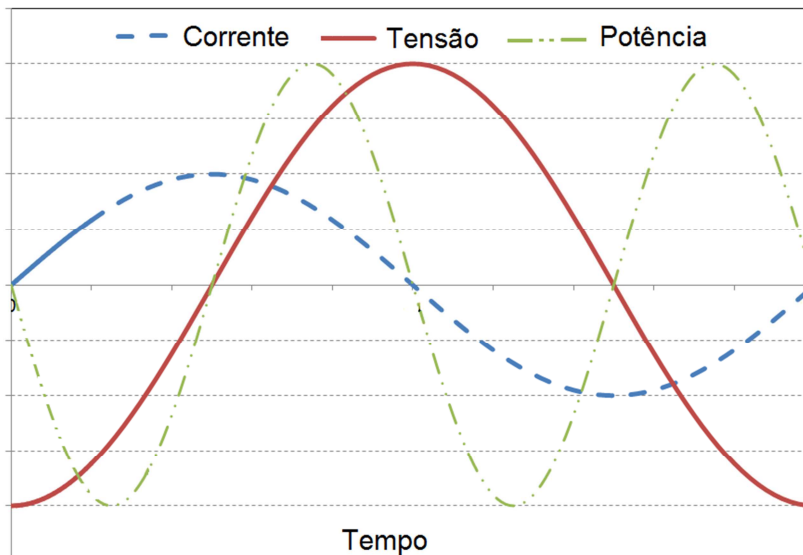


Figura 6 – Tensão, corrente e potência em um capacitor

## 4.2. Indutância

O indutor é um elemento de circuito que possui a característica de conservar energia através do campo magnético entre sua bobina, tendendo manter constante a corrente entre os seus terminais. O indutor é representado pela letra L e tem como unidade o Henry [H]



Em circuitos CC o indutor funciona como um circuito fechado (fio condutor). Porém, em CA o capacitor exerce oposição à variação de corrente, fenômeno denominado reatância indutiva, designada por  $X_L$ , medida em ohm [ $\Omega$ ] e expressa por:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \quad [\Omega]$$

Para uma fonte senoidal a corrente no indutor é expressa por:

$$i_L(t) = I_p \cdot \text{sen}(wt)$$

A tensão no indutor será:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot \omega \cdot I_p \cdot \cos(\omega t) = L \cdot \omega \cdot I_p \cdot \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

O indutor atrasa a corrente em relação à tensão, conforme pode ser visto pela ilustração abaixo:

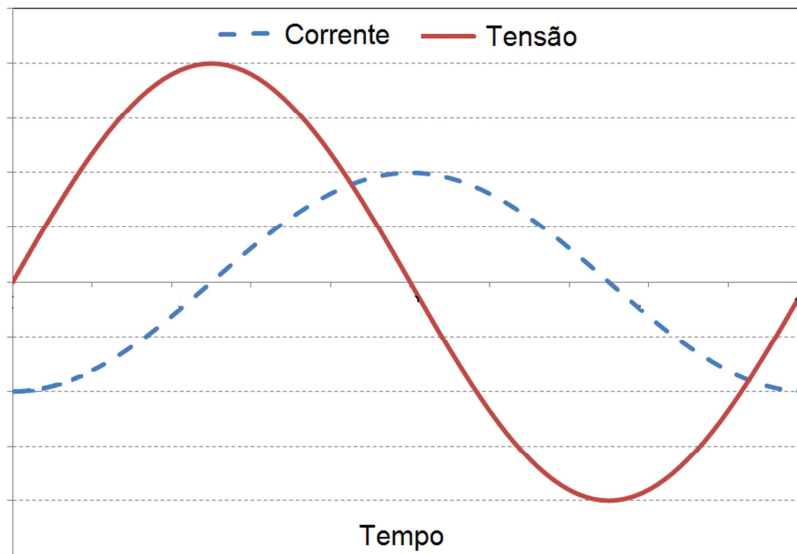


Figura 7 – Tensão e corrente em um indutor.

Assim como num circuito puramente capacitivo, no indutivo não há dissipação de potência ativa. Como se pode observar na figura a seguir, em um período da rede elétrica, o valor médio da potência no indutor é nulo. O indutor armazena energia no primeiro semi-ciclo da rede devolvendo esta mesma energia no segundo.

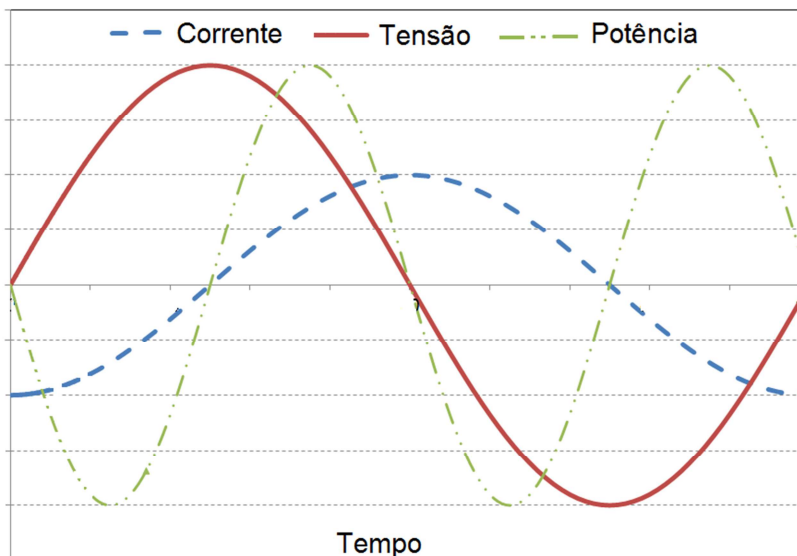


Figura 8 – Tensão, corrente e potência em um indutor.

### 4.3. Impedância

Os circuitos de corrente alternada raramente são apenas resistivos, indutivos ou capacitivos. Na maioria das vezes, os mesmos apresentam as duas reatâncias, ou uma delas, combinada com a resistência.

A resistência total do circuito, neste caso, passa a ser denominada de impedância, designada por Z e medida em ohm [Ω]. Neste caso a Lei de Ohm passa a ser expressa por:

$$V = Z \cdot I$$



#### 4. Tipos de potência

Em virtude da possibilidade da associação dos elementos resistor, capacitor e indutor a potência elétrica em um circuito pode ser de três tipos:

- Potência ativa: a potência dissipada por resistores, expressa em watt (W).

$$P = R \cdot I^2 \text{ [W]}$$

- Potência reativa: potência que retorna dos indutores e capacitores, expressa em volt ampere reativo (VAR). A equação é similar, trocando somente a resistência pela reatância (capacitiva ou indutiva).

$$Q = X \cdot I^2 \text{ [VAR]}$$

A potência reativa pode ser positiva, proveniente dos circuitos indutivos ( $X > 0$ ), ou negativa, proveniente dos circuitos capacitivos ( $X < 0$ ). Logo, a combinação de indutores e capacitores permite que um absorva a potência reativa do outro.

- Potência aparente: a potência ativa e reativa combinada, expressa em Volt Ampère (VA). O módulo da potência aparente é a multiplicação dos módulos da tensão e corrente:

$$S = V \cdot I \text{ [VA]}$$

#### 5.1. Triângulo de Potências

As três potências se relacionam pela seguinte expressão:

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

E pelo triângulo:

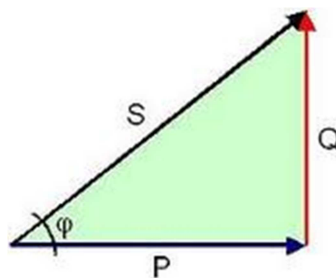


Figura 9 – Triângulo de potências.

O ângulo da potência aparente será o mesmo ângulo da impedância. As potências ativa e reativa podem ser calculadas a partir deste ângulo:

$$P = S \cdot \cos\varphi = V \cdot I \cdot \cos\varphi$$

$$Q = S \cdot \sin\varphi = V \cdot I \cdot \sin\varphi$$

Em um arranjo de várias cargas, quando a reatância  $X_L$  for maior do que  $X_C$  o circuito é indutivo. Neste caso, a corrente total é atrasada em relação à tensão de entrada e tem-se o triângulo de potências resultante apresentado abaixo.

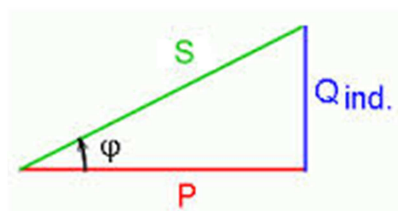


Figura 10 – Triângulo de potências de um circuito indutivo.

Por outro lado, quando a reatância  $X_L$  for menor do que  $X_C$  o circuito é capacitivo, sendo a corrente total é adiantada em relação à tensão de entrada e tem-se o triângulo de potências resultante apresentado abaixo.

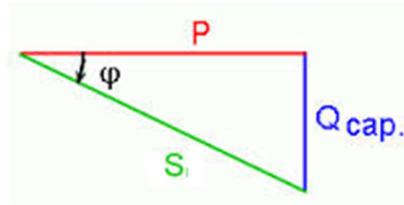


Figura 10 – Triângulo de potências de um circuito capacitivo.

A potência reativa resultante pode ser calculada pela fórmula:

$$Q = Q_L - Q_C$$

## 5.2. Fator de Potência

Fator de potência é a fração da potência aparente que realiza trabalho. É uma grandeza adimensional, que atinge o valor de no máximo a unidade.

A potência reativa faz circular corrente pelo circuito sem que haja consumo, aquecendo os alimentadores e sobrecarregando os circuitos.

O fator de potência é o cosseno do ângulo do triângulo de potências, ou o ângulo de defasagem entre as forma de onda da tensão e da corrente:

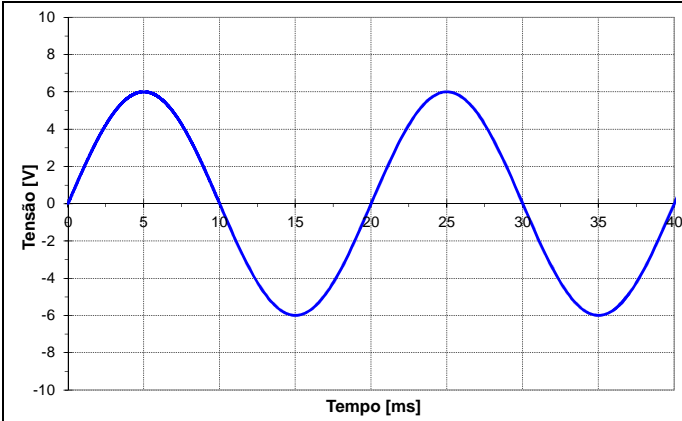
$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Percebe-se que um fator de potência baixo é sinal de um alto reativo, ou seja, a energia não está sendo devidamente aproveitada. Um fator de potência unitário significa que o circuito é resistivo, ou seja, toda a potência está sendo dissipada. Um fator de potência indutivo é dito atrasado, enquanto o capacitivo é adiantado.

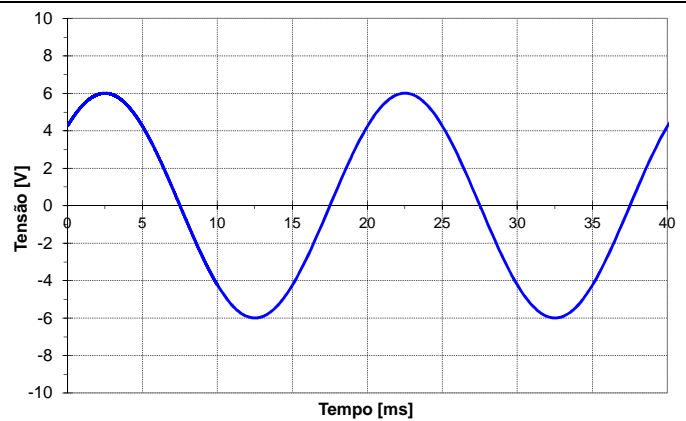
Nos grandes consumidores o fator de potência é uma medida importante, pois ele é tarifado se atingir valores inferiores a 0,92.

# EXERCÍCIOS

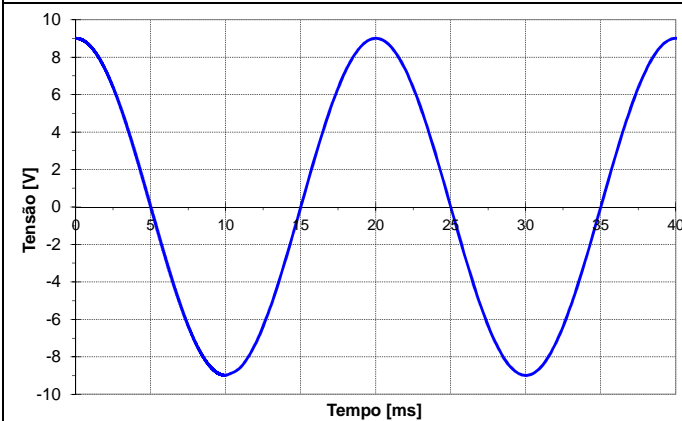
1. Apresente a função matemática das formas de onda abaixo.



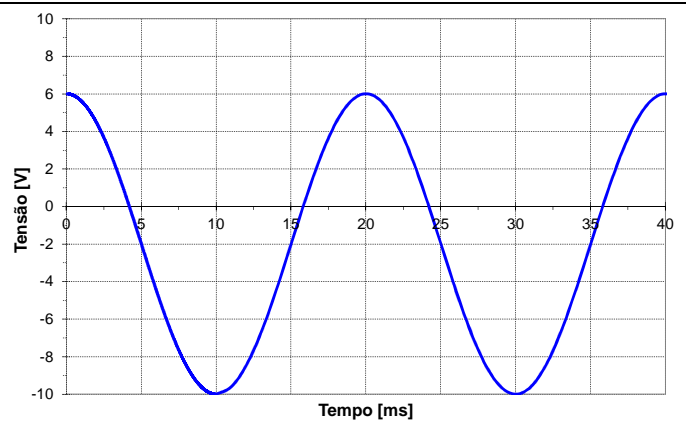
1.a



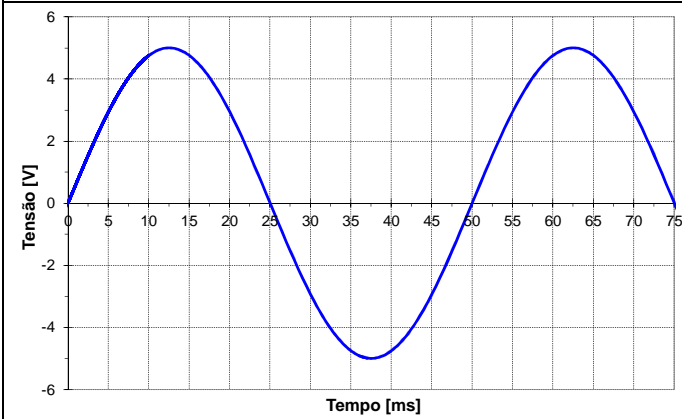
1.b



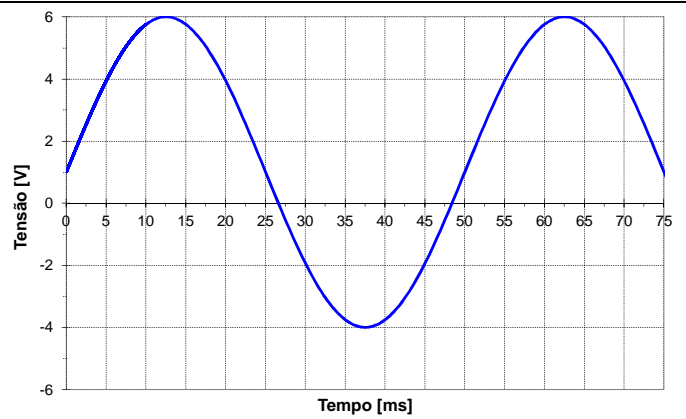
1.c



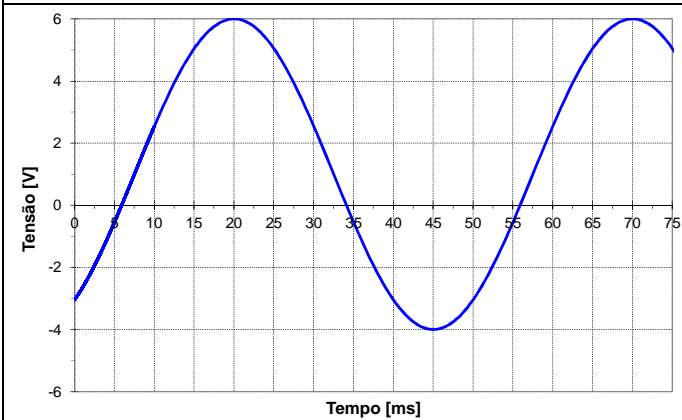
1.d



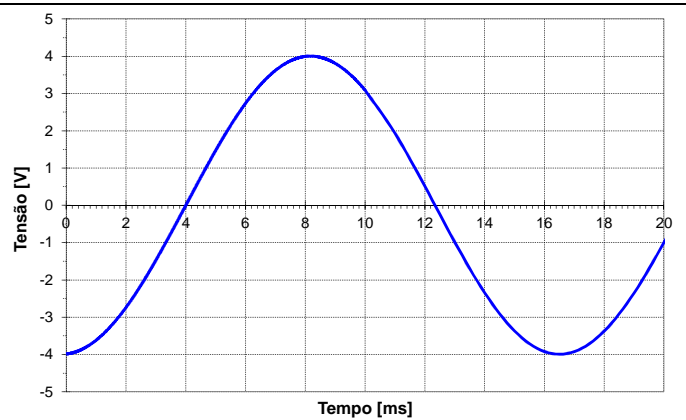
1.e



1.f



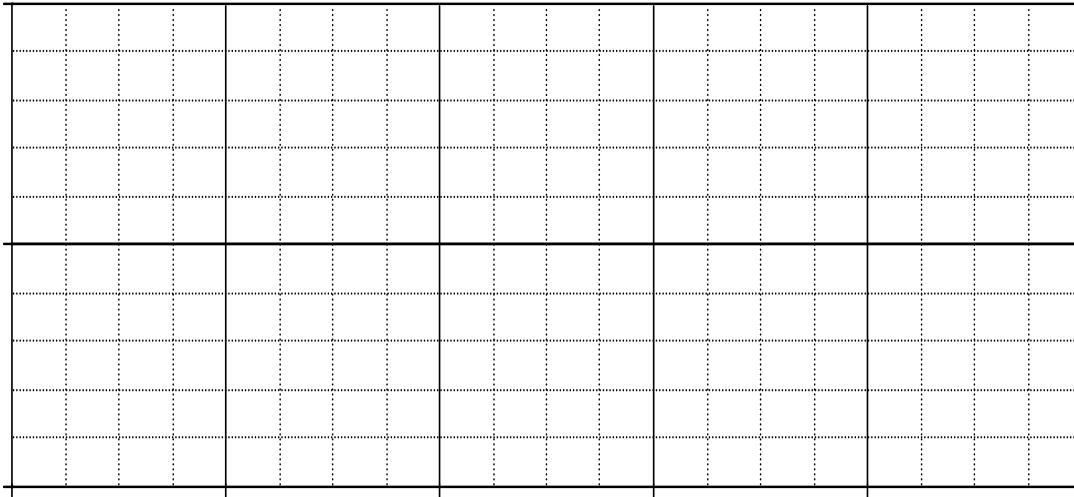
1.g



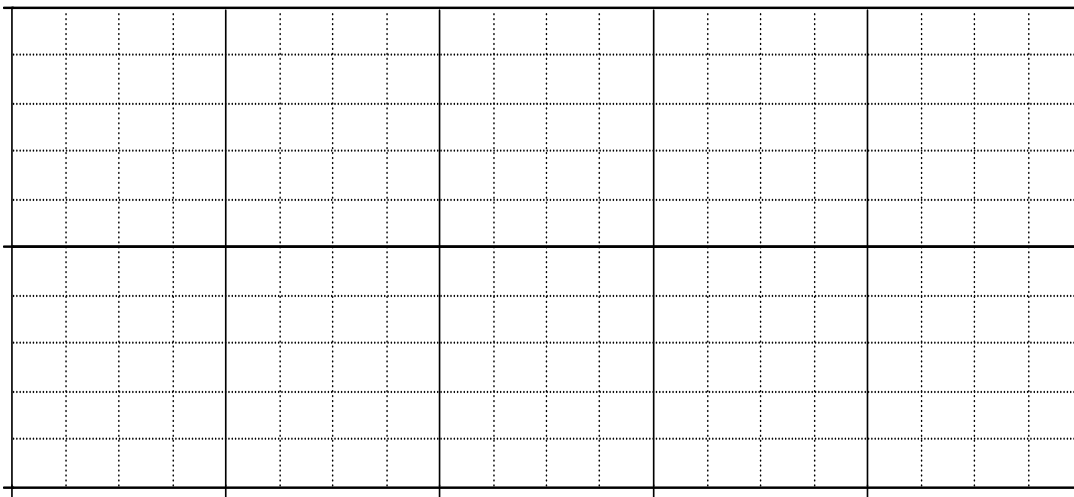
1.h

2. Apresente as formas de onda das seguintes funções matemáticas:

2.1)  $V(\omega t) = 4 \cdot \text{Sen}(\omega t + 45^\circ)$



2.2)  $V(\omega t) = 2 \cdot \text{Sen}(\omega t - 90^\circ) + 1$



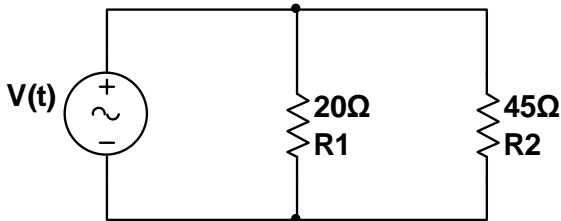
3. A tensão de pico de uma onda senoidal é de 179,6 V. Calcule a tensão instantânea em  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $225^\circ$  e  $270^\circ$ . Qual o seu valor eficaz?

4. Um forno elétrico consome 7,5 A de uma fonte de alimentação CC de 120 V. Qual o valor máximo de uma tensão alternada capaz de produzir o mesmo efeito térmico na resistência deste forno? Calcule a potência deste forno em CA.

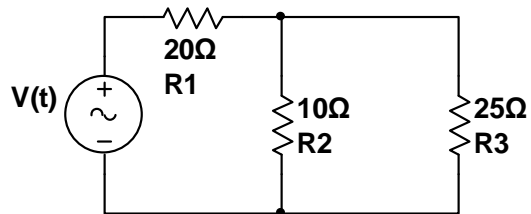
5. Para os circuitos abaixo determine:

- A tensão de pico e eficaz da fonte;
- A frequência do sinal;
- A corrente eficaz total do circuito;
- A potência total do circuito;
- As correntes eficazes e de pico nos resistores.

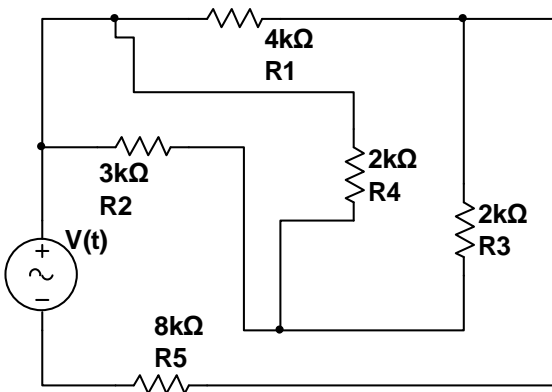
5.1)  $v(t) = 50 \cdot \text{Sen}(314,16t)$  [V]



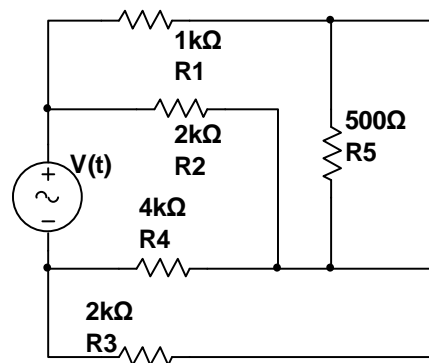
5.2)  $v(t) = 100 \cdot \text{Sen}(377t)$



5.3)  $v(t) = 70,71 \cdot \text{Sen}(314,16t)$

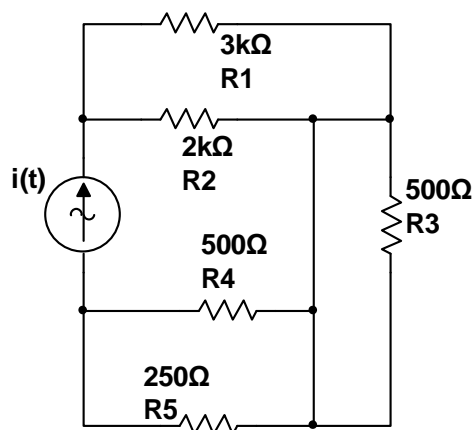


5.4)  $v(t) = 70,71 \cdot \text{Sen}(314,16t)$



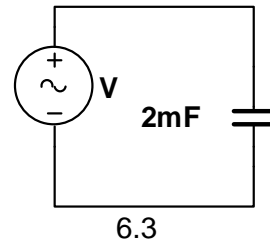
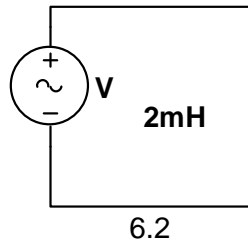
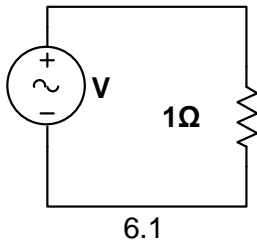
6. Dado  $i(t) = 169,71 \cdot \text{Sen}(314,16t)$  [A], onde  $i(t)$  é uma fonte de corrente alternada, determine:

- A tensão de pico e eficaz da fonte;
- A frequência do sinal;
- A potência total do circuito;
- As tensões e correntes eficazes nos resistores



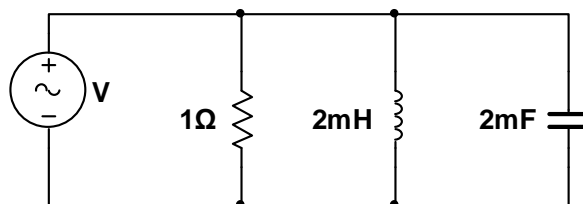
7. Para uma fonte de tensão expressa por  $V(t) = 311,13 \cdot \text{Sen}(377t)$  [V] aplicada nos circuitos abaixo determine:

- O valor da impedância;
- A corrente eficaz do circuito;
- As potências ativa, reativa e aparente.



8. Para uma fonte de tensão expressa por  $V(t) = 311,13 \cdot \text{Sen}(377t)$  [V] aplicada no circuito abaixo determine:

- O valor das impedâncias  $X_c$  e  $X_L$ ;
- As correntes eficaz nos elementos R,  $X_c$  e  $X_L$ ;
- As potências ativa, reativa e aparente em cada elemento do circuito;
- As potências ativa, reativa e aparente vista pela fonte;
- A corrente da fonte



9. Seja uma carga sob tensão de 220 V e com potência ativa de 10 kW. Calcule a potência aparente e a corrente quando seu fator de potência for igual a 0,5 e a 1.

10. Em uma rede de 220 V um reator de uma luminária fluorescente tem fator de potência de 0,92, onde circula um corrente de 0,72 A. Para este reator calcule as potências ativa e aparente.

11. Um circuito RC série ligado a rede de 220 V/60 Hz dissipa 1.200 W, com fator de potência de 0,8. Determine:

- A potência aparente do circuito;
- A corrente do circuito;
- A potência reativa do circuito
- O valor da resistência e da capacitância

12. Um circuito constituído de um computador e seu monitor ligados em uma rede de 220V/60Hz dissipa 560 W, com fator de potência de 0,85. Determine para este circuito:

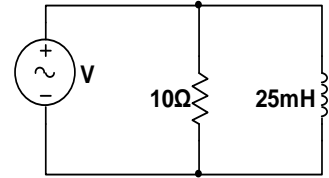
- A potência aparente;
- A corrente;
- A potência reativa

Se esta carga fosse modelada como um circuito RC paralelo qual seriam os seus valores de resistência e de capacitância?

13. O circuito ao lado está ligado à uma rede de 220 V/60 Hz.

Determine:

- As potências aparente, ativa e reativa do circuito;
- A corrente eficaz da fonte.



14. Um forno de indução de 15 kVA e fator de potência de 0,85 opera 24 horas por dia ao longo de todo o ano. Considerando uma tarifa de R\$ 0,35 /kWh calcule o custo da energia deste forno ao mês.

15. A potência ativa de uma instalação elétrica é de 2.500W. Se a tensão de alimentação é de 220V eficaz calcular a potência aparente e a corrente circulante quando:

12.1) FP = 0,95

12.2) FP = 0,6

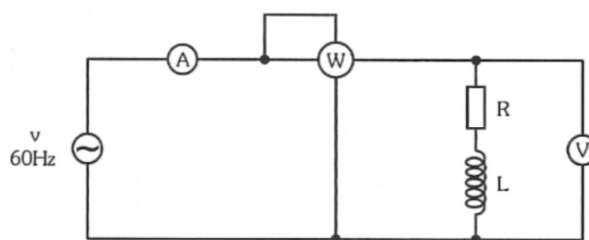
16. Em um circuito estão conectadas as cargas listadas abaixo em paralelo. Calcule as potências ativa, reativa e aparente totais e o fator de potência deste circuito.

- Um aquecedor resistivo de 1,5 kW;

- Dez lâmpadas fluorescentes totalizando 400 W, FP de 0,85 indutivo;

- Um motor de indução de 1,5 cv (1 cv = 0,736 kW), FP de 0,90 indutivo e rendimento de 92 % (a potência nominal do motor é relativa a entregue em seu eixo. Portanto, deve-se levar em conta o rendimento da máquina para a determinação da potência de entrada do mesmo).

17. No circuito abaixo a leitura dos instrumentos é  $V=220$  V,  $I=55$  A e  $P=10$  kW. Calcular a potência aparente e o fator de potência do circuito.



18. Duas cargas estão ligadas em paralelo sujeitas a uma tensão de 660 VRMS. Ambas demandam uma potência que totaliza 52.800 W com um fator de potência de 0,80 adiantado. Uma das cargas absorve 40 kVA, com fator de potência atrasado de 0,96. Determine a corrente total do circuito. Qual é o fator de potência da outra carga?