

1. FONTE SENOIDAL

1.1. Geração do Sinal Senoidal

A forma de onda senoidal (ou sinusoidal) ocorre naturalmente na natureza, como se pode observar nas ondas do mar, na propagação do som e da luz, no movimento de um pêndulo etc. e também é a forma mais eficiente de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica.

Nas duas últimas décadas do século XIX o uso de corrente contínua em sistemas de potência era defendido por Thomas Edison, enquanto a corrente alternada era proposta por Nikola Tesla e George Westinghouse Jr.

Uma função senoidal é facilmente obtida para geração de energia elétrica. Uma bobina sujeita a um campo magnético variável produz em seus terminais uma tensão elétrica segundo a seguinte equação (Lei de Faraday):

$$v(t) = -N \frac{d\phi(dt)}{dt}$$

Onde: v - tensão induzida [V]
 N - número de espiras
 ϕ - fluxo magnético [Wb]

A estrutura a seguir apresenta esquematicamente a geração de um sinal senoidal a partir da movimentação do eixo de uma bobina submetida ao campo magnético de dois ímãs permanentes.

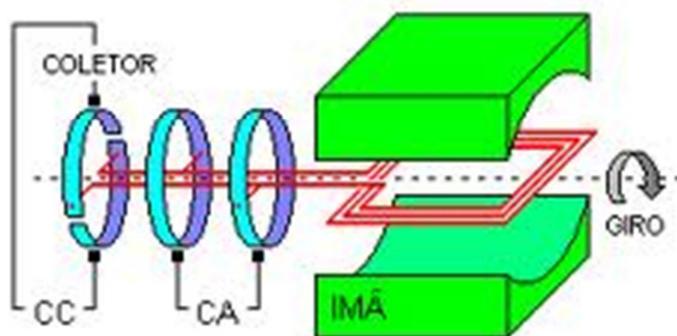


Figura 1 – Geração de um sinal senoidal.

Uma fonte de tensão ou corrente senoidal varia com o tempo e pode ser representada por uma senoide em função de sua frequência angular (ωt) ou em função do tempo (t).

As formas de ondas seno e cosseno podem ser observadas na figura a seguir.

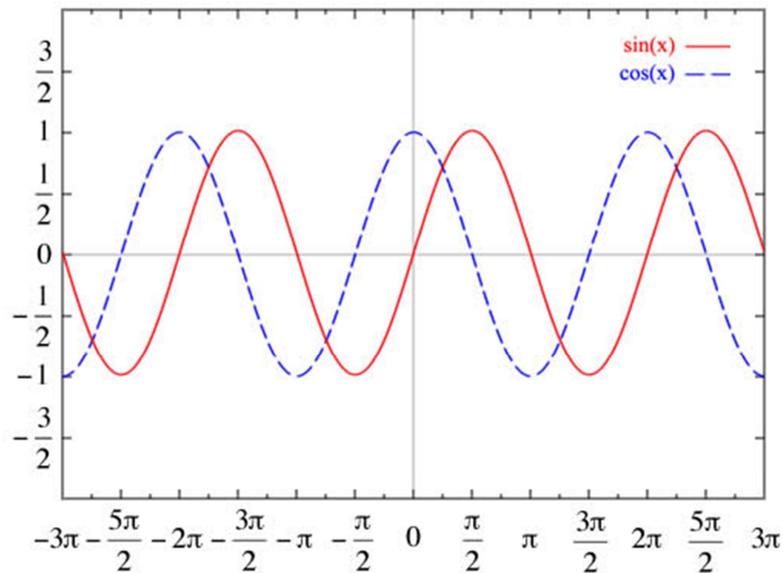


Figura 2 - Formas de ondas seno e cosseno.

1.2. Expressão Matemática do Sinal Senoidal

Todo sinal elétrico senoidal pode ter seu comportamento descrito de modo gráfico ou analítico através de uma função matemática senoidal, periódica e variante com o tempo. Adota-se para a representação dos sinais de tensão e de corrente alternada senoidal as seguintes expressões gerais:

$$v(\omega t) = V_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)$$

Onde: $V_{m\acute{a}x}$ e $I_{m\acute{a}x}$ - valores máximo, de pico ou amplitude
 ω - frequência angular elétrica
 θ - ângulo de fase

$$i(\omega t) = I_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

Na Figura 3 estão apresentados graficamente os principais parâmetros do sinal senoidal e, na sequência, suas definições.

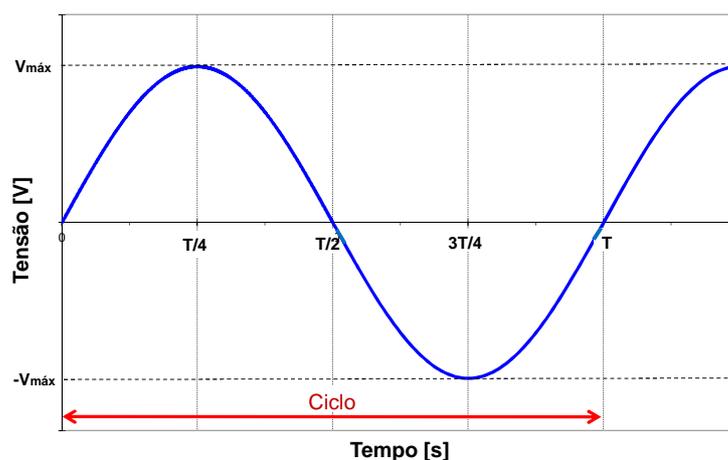


Figura 3 – Parâmetros do sinal senoidal.

- Valor máximo, de pico ou amplitude - $V_{m\acute{a}x}$, V_p ou A : é o valor extremo alcançado pelo sinal.
- Período - T [s]: é o tempo decorrido na realização de um ciclo completo.

- Frequência - f [Hz] : é o número de ciclos realizados, na unidade de tempo, obtido por:

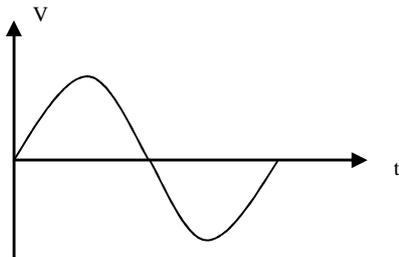
$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]}$$

Onde: 1 Hz = 1 ciclo / segundo

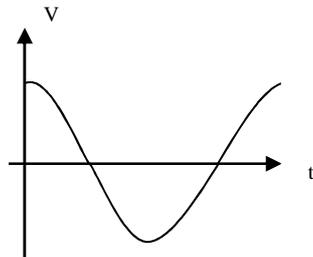
- Frequência angular elétrica - ω [rad/s]: É a rapidez de variação do sinal. Ou seja, é a velocidade com que o sinal realiza um ciclo de variação, o que equivale realizar, num círculo, um arco de 2π radianos ou 360° .
- Ângulo de fase - θ [°] : É a posição relativa, expressa em grau, do sinal em relação a uma referência ou a outro sinal

Seu valor pode ser:

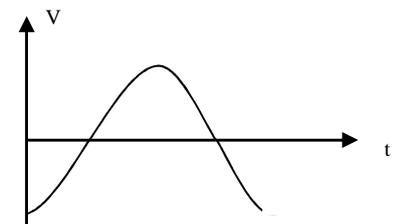
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta > 0^\circ \text{ (positivo) - sinal adiantado} \\ \theta = 0^\circ \text{ - sinal em fase} \\ \theta < 0^\circ \text{ (negativo) - sinal atrasado} \end{array} \right.$$



$\theta = 0^\circ$
(em fase)



$\theta = +90^\circ$
(adiantado)



$\theta = -90^\circ$
(atrasado)

- Defasagem: É a diferença de fase entre dois sinais (**A e B**). Ou seja, é a medida do adiantamento, ou do atraso, de um sinal (**A**) em relação a outro sinal de referência (**B**)

$$\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B \quad \text{ou} \quad \theta_{BA} = \theta_B - \theta_A$$

Por exemplo:

$$\text{Se } v_A = 10 \cdot \text{sen}(200t + 30^\circ) \text{ [V]} \quad \text{e} \quad v_B = 100 \cdot \text{sen}(200t + 50^\circ) \text{ [V]}$$

Então a defasagem entre "A" e "B" é: $\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B = 30^\circ - 50^\circ = -20^\circ$

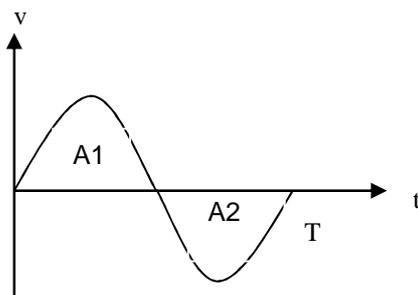
Note que o sinal menos significa dizer que "A" está atrasado de "B" de 20°

- Valor médio - $V_{\text{méd}}$ ou $I_{\text{méd}}$: É a média dos valores do sinal em um período. Esta média corresponde à área abaixo da curva do sinal dividida pelo seu período e é expressa por:

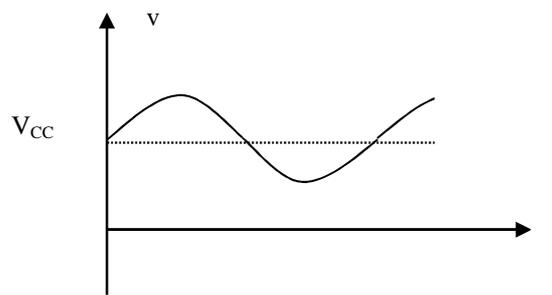
$$V_{\text{méd}} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

Existem duas situações práticas a serem consideradas:

a) Sinal CA "puro"



b) Sinal CA + CC



$$A1 = A2$$

$$V_{méd} = \frac{A1 - A2}{T} = 0$$

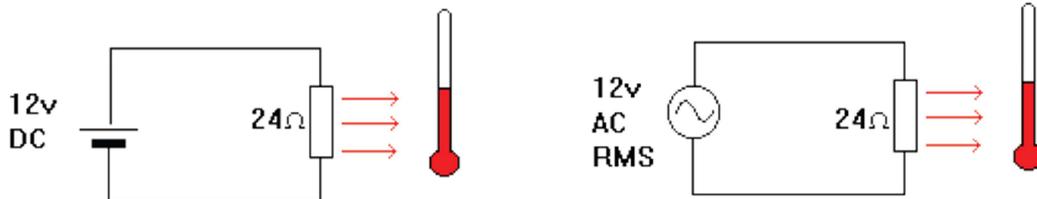
Valor médio é nulo.

$$V_{sinal} = V_{ca} + V_{cc}$$

$$V_{méd} = V_{méd CA} + V_{méd CC} = 0 + V_{cc}$$

O valor médio é a própria componente CC do sinal

- Valor eficaz: Como a forma de onda senoidal é pulsante sua energia não é transmitida de forma constante como acontece em corrente contínua. Para tensões variantes no tempo se pode obter um "valor efetivo" equivalente ao valor médio de uma fonte CC que demandaria a mesma potência elétrica.



O Valor Eficaz (ou RMS - *root mean square*) de uma função periódica é definido como a raiz quadrada do valor médio da função ao quadrado, ou em forma algébrica:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t)^2 dt}$$

Para uma onda senoidal pode ser demonstrado que o valor eficaz equivale a:

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Pela equação anterior note que o valor eficaz não depende da frequência nem do ângulo de fase, somente da amplitude do sinal.

Assim, por exemplo, na rede elétrica local 220 V é uma tensão eficaz, referente à tensão alternada senoidal em 60 Hz de valor de pico de 311,13 V. A representação matemática deste sinal é:

$$v(\omega t) = V_{máx} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)$$

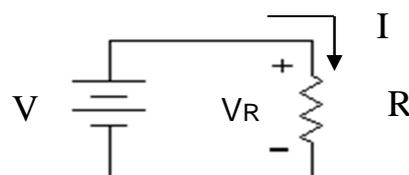
$$V_{máx} = 311,13 \text{ V} \quad - \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 377 \text{ rad/s} \quad - \quad \theta_v = 0^\circ \text{ - escolhido}$$

$$v(\omega t) = 311,13 \cdot \text{sen}(377t + 0^\circ)$$

2. Resposta senoidal do resistor

Em corrente contínua vimos que, no resistor, a tensão e a corrente se relacionam na forma:

$$I = \frac{V}{R} \text{ ou } V = R \cdot I$$



Em corrente alternada senoidal a relação é dada por:

Partindo-se de:

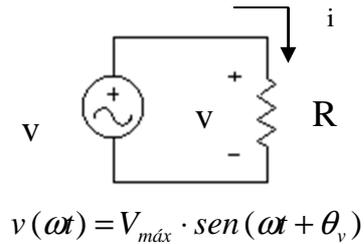
$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Substituindo $v(t)$ tem-se:

$$i(t) = \frac{V_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)}{R}$$

Ou:

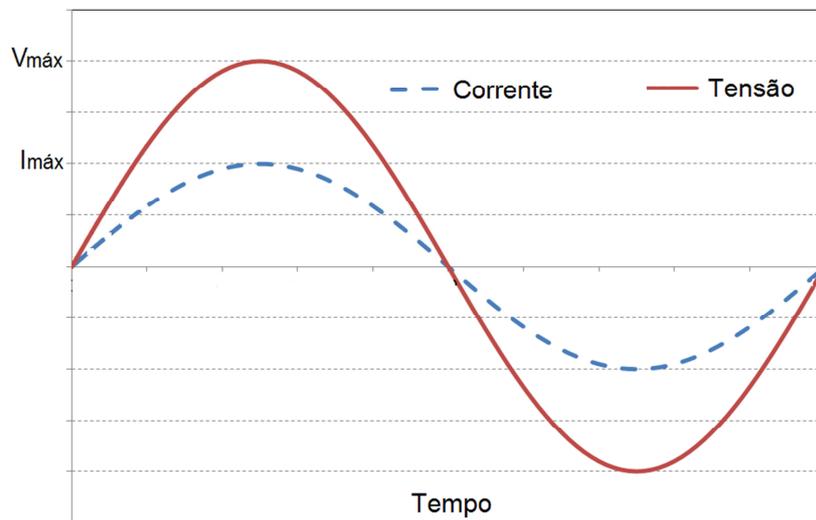
$$i(t) = \frac{I_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_v)}{R}$$



Com no resistor a tensão e corrente estão em fase:

$$I_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{R} \quad \text{ou} \quad i(t) = I_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_i)$$

Graficamente:



Considerando seus respectivos valores eficazes a relação fica:

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{R}$$

Em corrente alternada, como a tensão e a corrente se relaciona que em CC, ao se adotar valores eficazes as equações da potência elétrica são as mesmas.

$$P = V_{ef} \cdot I_{ef} \quad \text{ou} \quad P = R \cdot I_{ef}^2 \quad \text{ou} \quad P = \frac{V_{ef}^2}{R}$$

No tempo tem-se a seguinte equação: $p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_p \cdot I_p \cdot \text{sen}^2(\omega t)$

A potência dissipada no resistor será sempre positiva, como pode ser observado no gráfico a seguir:

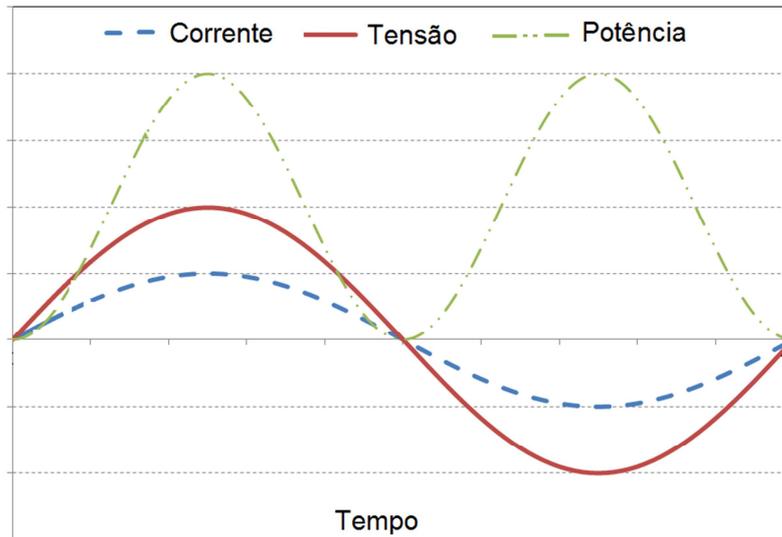


Figura 4 – Tensão, corrente e potência em um resistor.

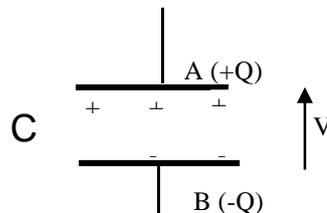
3. Elementos armazenadores de energia

Alguns elementos de circuitos elétricos podem armazenar energia em forma de campo elétrico ou magnético

4.1. Capacitância

O capacitor é um elemento de circuito que possui a característica de conservar energia através do campo elétrico estabelecido entre suas placas, tendendo manter constante a tensão entre os seus terminais.

O capacitor é representado pela letra C e tem como unidade o Farad [F].



Em circuitos CC o capacitor funciona como um circuito aberto. Porém, em CA o capacitor exerce oposição à variação de tensão, fenômeno denominado reatância capacitiva, designada por X_c , medida em ohm [Ω] e expressa por:

$$X_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \quad [\Omega]$$

Para uma fonte senoidal a tensão no capacitor é expressa por:

$$V_c(t) = V_p \cdot \text{sen}(wt)$$

A corrente no capacitor será:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} = C \cdot w \cdot V_p \cdot \cos(wt) = C \cdot w \cdot V_p \cdot \text{sen}(wt + 90^\circ)$$

O capacitor atrasa a tensão em relação à corrente, conforme pode ser visto pela ilustração abaixo:

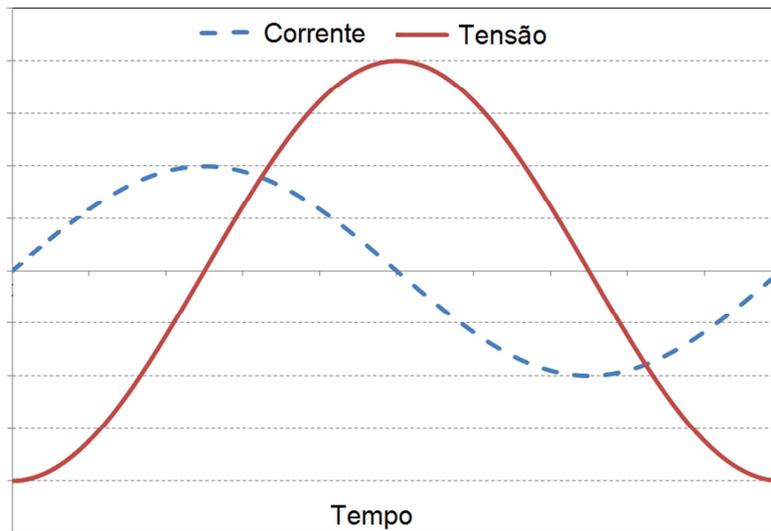


Figura 5 – Tensão e corrente em um capacitor.

Em um circuito puramente capacitivo não há dissipação de potência ativa. Como se pode observar na figura a seguir, em um período da rede elétrica, o valor médio da potência no capacitor é nulo. O capacitor armazena energia no primeiro semi-ciclo da rede devolvendo esta mesma energia no segundo.

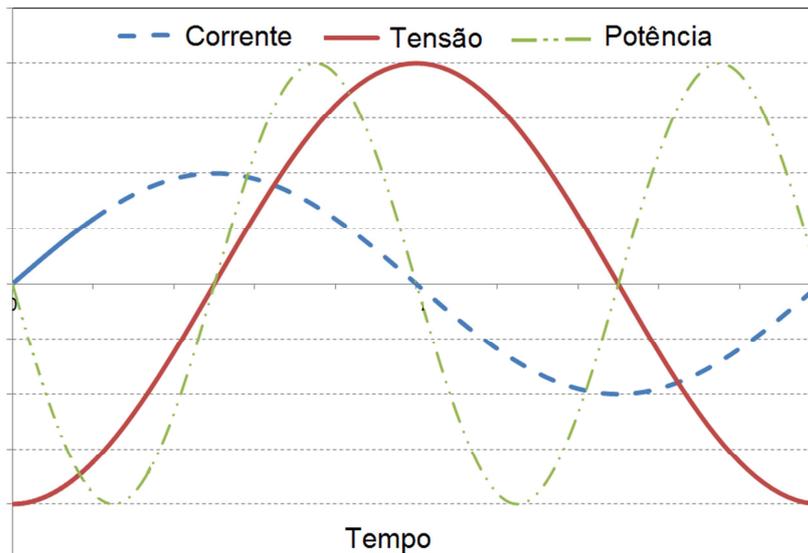


Figura 6 – Tensão, corrente e potência em um capacitor

4.2. Indutância

O indutor é um elemento de circuito que possui a característica de conservar energia através do campo magnético entre sua bobina, tendendo manter constante a corrente entre os seus terminais. O indutor é representado pela letra L e tem como unidade o Henry [H]



Em circuitos CC o indutor funciona como um circuito fechado (fio condutor). Porém, em CA o capacitor exerce oposição à variação de corrente, fenômeno denominado reatância indutiva, designada por X_L , medida em ohm [Ω] e expressa por:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \quad [\Omega]$$

Para uma fonte senoidal a corrente no indutor é expressa por:

$$i_L(t) = I_p \cdot \text{sen}(wt)$$

A tensão no indutor será:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot \omega \cdot I_p \cdot \cos(\omega t) = L \cdot \omega \cdot I_p \cdot \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

O indutor atrasa a corrente em relação à tensão, conforme pode ser visto pela ilustração abaixo:

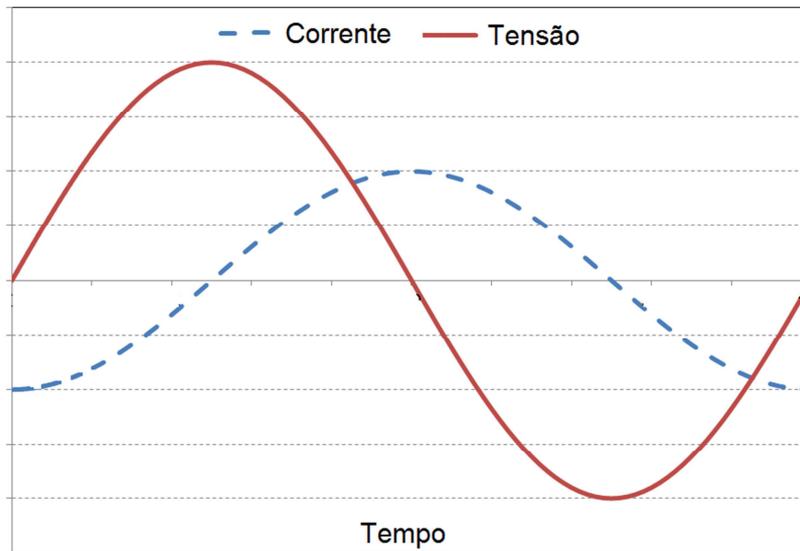


Figura 7 – Tensão e corrente em um indutor.

Assim como num circuito puramente capacitivo, no indutivo não há dissipação de potência ativa. Como se pode observar na figura a seguir, em um período da rede elétrica, o valor médio da potência no indutor é nulo. O indutor armazena energia no primeiro semi-ciclo da rede devolvendo esta mesma energia no segundo.

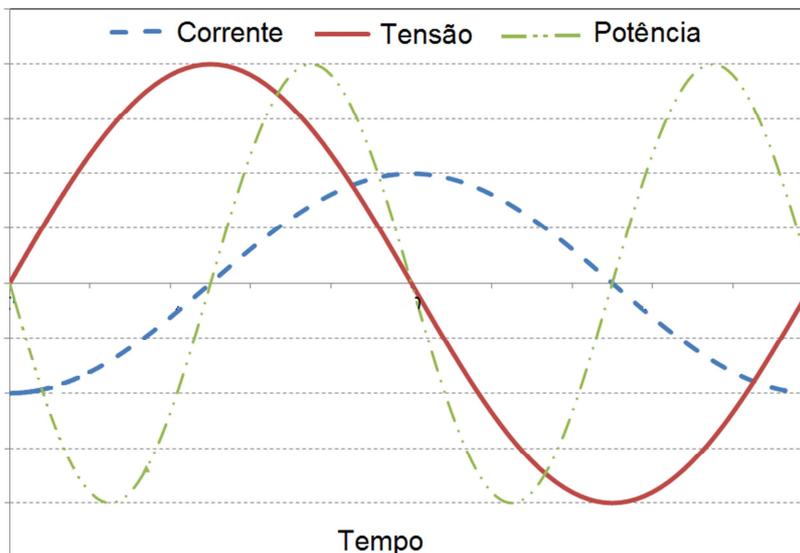


Figura 8 – Tensão, corrente e potência em um indutor.

4.3. Impedância

Os circuitos de corrente alternada raramente são apenas resistivos, indutivos ou capacitivos. Na maioria das vezes, os mesmos apresentam as duas reatâncias, ou uma delas, combinada com a resistência.

A resistência total do circuito, neste caso, passa a ser denominada de impedância, designada por Z e medida em ohm [Ω]. Neste caso a Lei de Ohm passa a ser expressa por:

$$V = Z \cdot I$$

4. Tipos de potência

Em virtude da possibilidade da associação dos elementos resistor, capacitor e indutor a potência elétrica em um circuito pode ser de três tipos:

- Potência ativa: a potência dissipada por resistores, expressa em watt (W).

$$P = R \cdot I^2 \quad [W]$$

- Potência reativa: potência que retorna dos indutores e capacitores, expressa em volt ampere reativo (VAR). A equação é similar, trocando somente a resistência pela reatância (capacitiva ou indutiva).

$$Q = X \cdot I^2 \quad [VAR]$$

A potência reativa pode ser positiva, proveniente dos circuitos indutivos ($X > 0$), ou negativa, proveniente dos circuitos capacitivos ($X < 0$). Logo, a combinação de indutores e capacitores permite que um absorva a potência reativa do outro.

- Potência aparente: a potência ativa e reativa combinada, expressa em Volt Ampère (VA). O módulo da potência aparente é a multiplicação dos módulos da tensão e corrente:

$$S = V \cdot I \quad [VA]$$

5.1. Triângulo de Potências

As três potências se relacionam pela seguinte expressão:

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

E pelo triângulo:

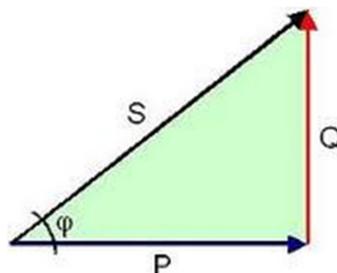


Figura 9 – Triângulo de potências.

O ângulo da potência aparente será o mesmo ângulo da impedância. As potências ativa e reativa podem ser calculadas a partir deste ângulo:

$$P = S \cdot \cos\varphi = V \cdot I \cdot \cos\varphi$$

$$Q = S \cdot \sin\varphi = V \cdot I \cdot \sin\varphi$$

Em um arranjo de várias cargas, quando a reatância X_L for maior do que X_C o circuito é indutivo. Neste caso, a corrente total é atrasada em relação à tensão de entrada e tem-se o triângulo de potências resultante apresentado abaixo.

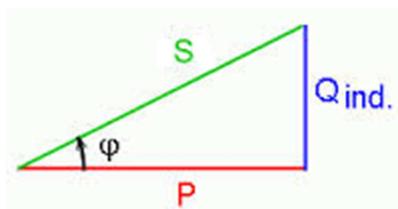


Figura 10 – Triângulo de potências de um circuito indutivo.

Por outro lado, quando a reatância X_L for menor do que X_C o circuito é capacitivo, sendo a corrente total é adiantada em relação à tensão de entrada e tem-se o triângulo de potências resultante apresentado abaixo.

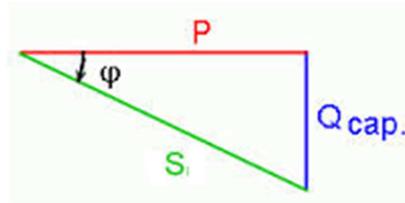


Figura 10 – Triângulo de potências de um circuito capacitivo.

A potência reativa resultante pode ser calculada pela fórmula:

$$Q = Q_L - Q_C$$

5.2. Fator de Potência

Fator de potência é a fração da potência aparente que realiza trabalho. É uma grandeza adimensional, que atinge o valor de no máximo a unidade.

A potência reativa faz circular corrente pelo circuito sem que haja consumo, aquecendo os alimentadores e sobrecarregando os circuitos.

O fator de potência é o cosseno do ângulo do triângulo de potências, ou o ângulo de defasagem entre as forma de onda da tensão e da corrente:

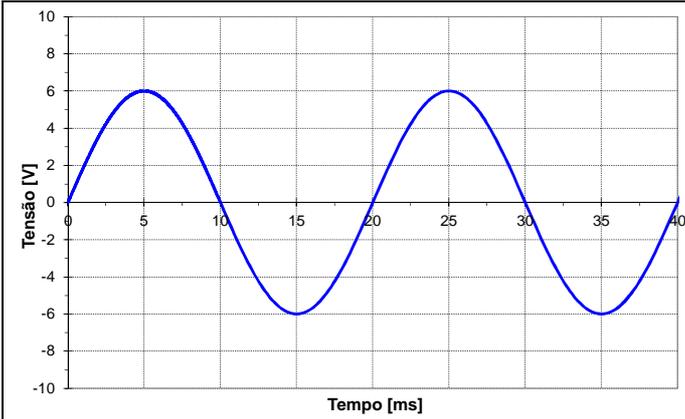
$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Percebe-se que um fator de potência baixo é sinal de um alto reativo, ou seja, a energia não está sendo devidamente aproveitada. Um fator de potência unitário significa que o circuito é resistivo, ou seja, toda a potência está sendo dissipada. Um fator de potência indutivo é dito atrasado, enquanto o capacitivo é adiantado.

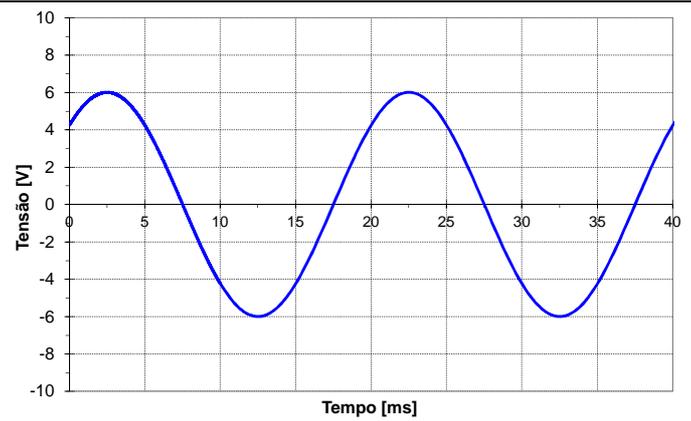
Nos grandes consumidores o fator de potência é uma medida importante, pois ele é tarifado se atingir valores inferiores a 0,92.

EXERCÍCIOS

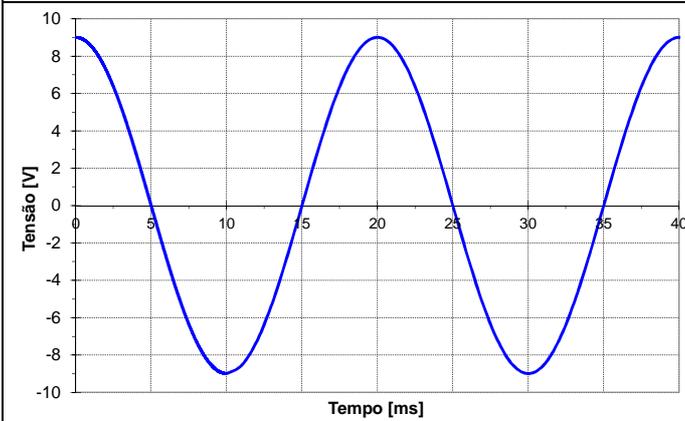
1. Apresente a função matemática das formas de onda abaixo.



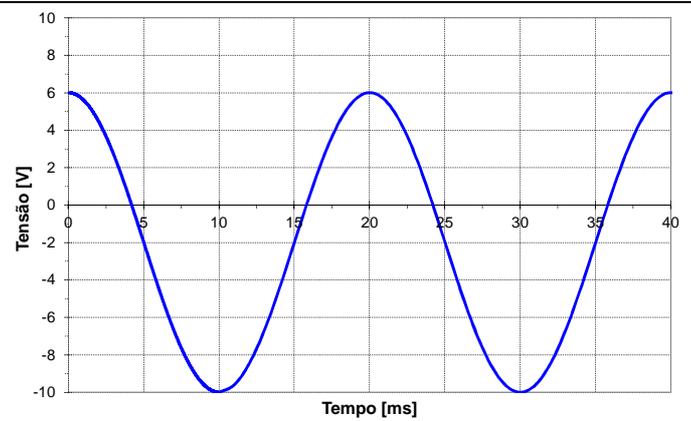
1.a



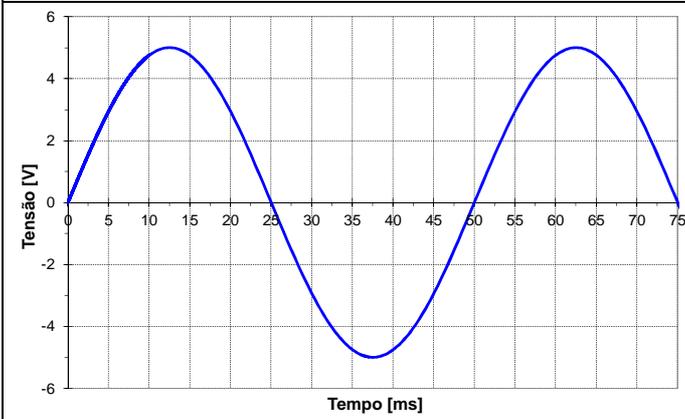
1.b



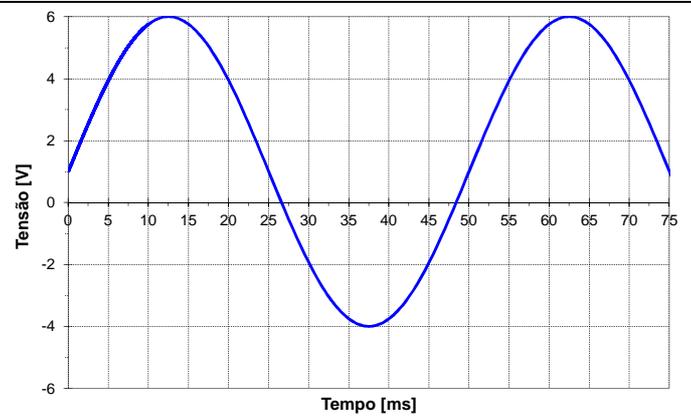
1.c



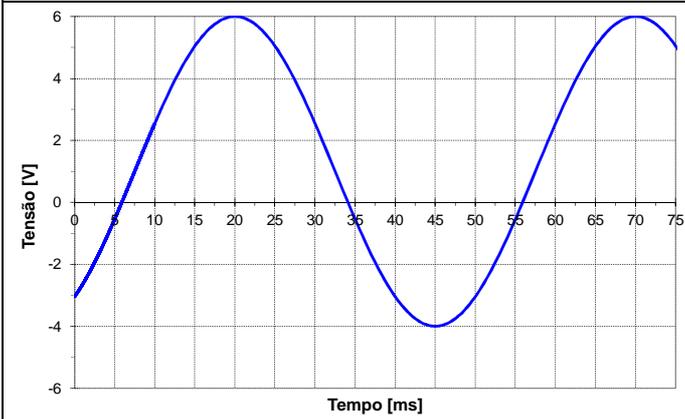
1.d



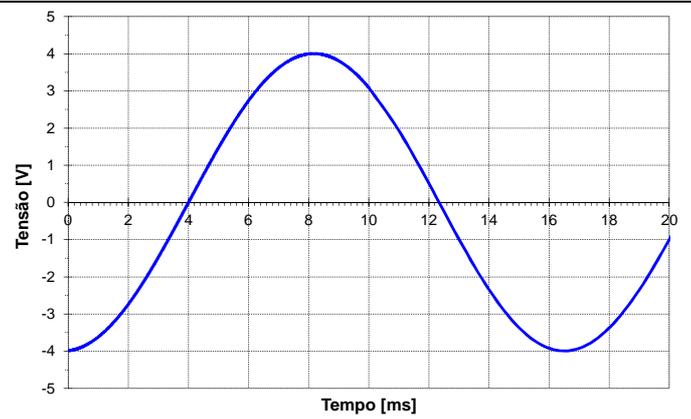
1.e



1.f



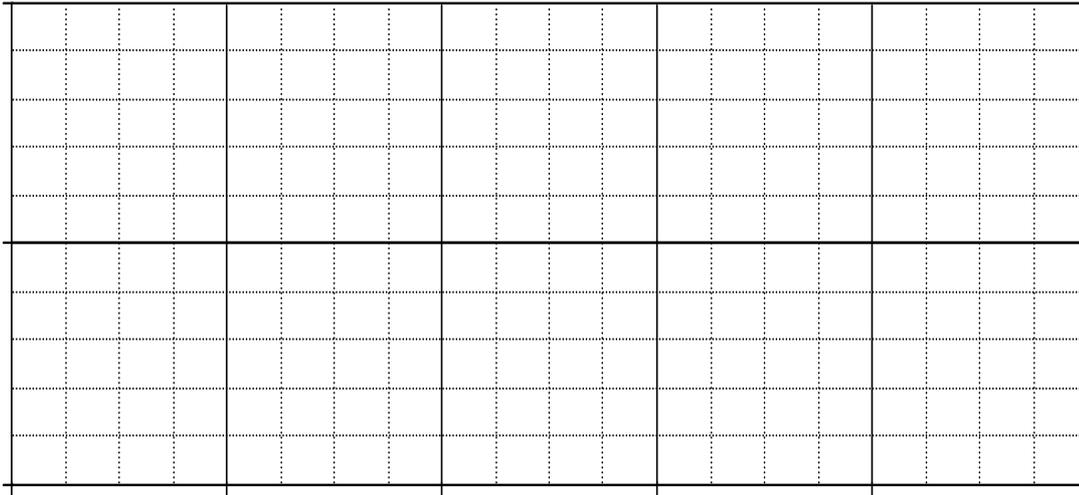
1.g



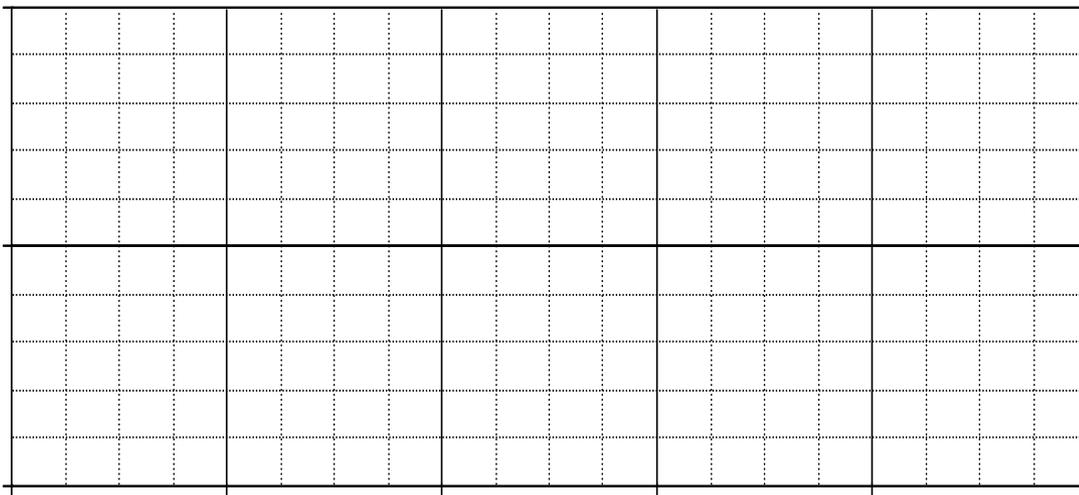
1.h

2. Apresente as formas de onda das seguintes funções matemáticas:

2.1) $V(\omega t) = 4 \cdot \text{Sen}(\omega t + 45^\circ)$



2.2) $V(\omega t) = 2 \cdot \text{Sen}(\omega t - 90^\circ) + 1$



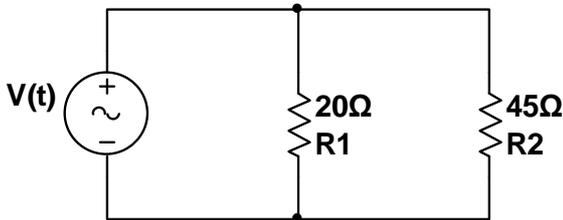
3. A tensão de pico de uma onda senoidal é de 179,6 V. Calcule a tensão instantânea em 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 135° , 180° , 225° e 270° . Qual o seu valor eficaz?

4. Um forno elétrico consome 7,5 A de uma fonte de alimentação CC de 120 V. Qual o valor máximo de uma tensão alternada capaz de produzir o mesmo efeito térmico na resistência deste forno? Calcule a potência deste forno em CA.

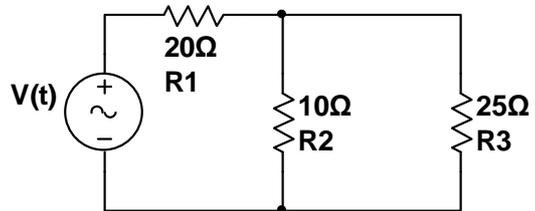
5. Para os circuitos abaixo determine:

- A tensão de pico e eficaz da fonte;
- A frequência do sinal;
- A corrente eficaz total do circuito;
- A potência total do circuito;
- As correntes eficazes e de pico nos resistores.

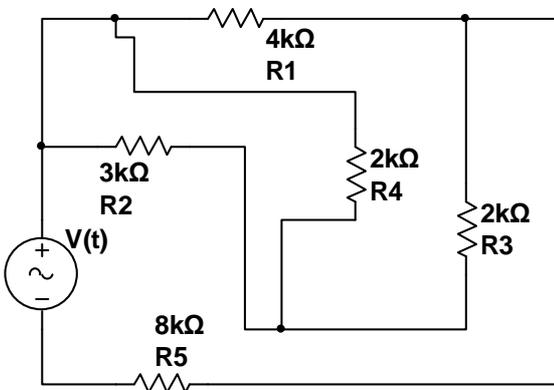
5.1) $v(t) = 50 \cdot \text{Sen}(314,16t)$ [V]



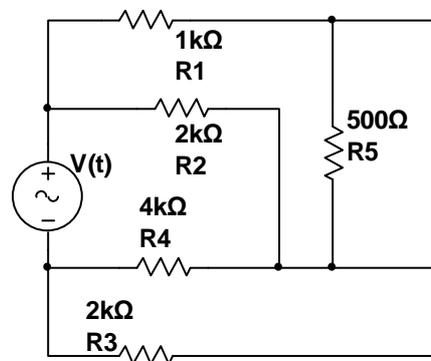
5.2) $v(t) = 100 \cdot \text{Sen}(377t)$



5.3) $v(t) = 70,71 \cdot \text{Sen}(314,16t)$

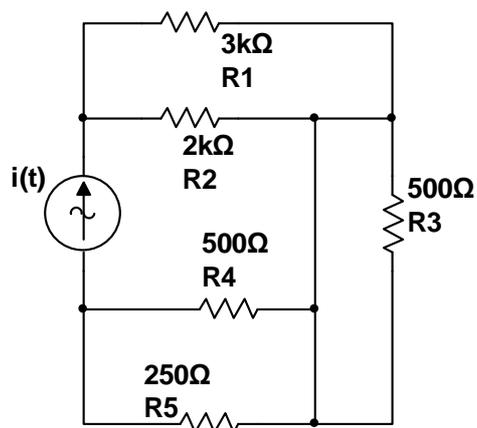


5.4) $v(t) = 70,71 \cdot \text{Sen}(314,16t)$



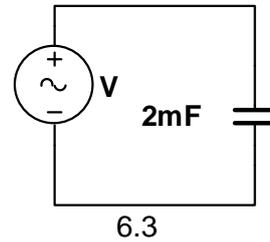
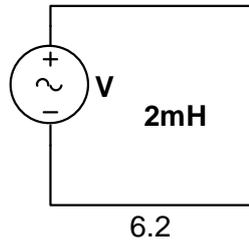
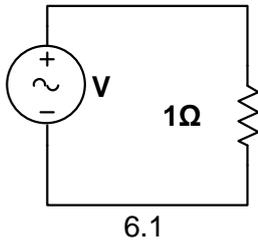
6. Dado $i(t) = 169,71 \cdot \text{Sen}(314,16t)$ [A], onde $i(t)$ é uma fonte de corrente alternada, determine:

- A tensão de pico e eficaz da fonte;
- A frequência do sinal;
- A potência total do circuito;
- As tensões e correntes eficazes nos resistores



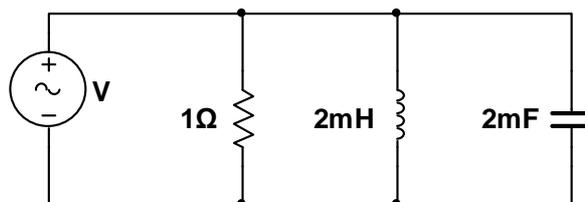
7. Para uma fonte de tensão expressa por $V(t) = 311,13 \cdot \text{Sen}(377t)$ [V] aplicada nos circuitos abaixo determine:

- O valor da impedância;
- A corrente eficaz do circuito;
- As potências ativa, reativa e aparente.



8. Para uma fonte de tensão expressa por $V(t) = 311,13 \cdot \text{Sen}(377t)$ [V] aplicada no circuito abaixo determine:

- O valor das impedâncias X_c e X_L ;
- As correntes eficaz nos elementos R, X_c e X_L ;
- As potências ativa, reativa e aparente em cada elemento do circuito;
- As potências ativa, reativa e aparente vista pela fonte;
- A corrente da fonte



9. Seja uma carga sob tensão de 220 V e com potência ativa de 10 kW. Calcule a potência aparente e a corrente quando seu fator de potência for igual a 0,5 e a 1.

10. Em uma rede de 220 V um reator de uma luminária fluorescente tem fator de potência de 0,92, onde circula um corrente de 0,72 A. Para este reator calcule as potências ativa e aparente.

11. Um circuito RC série ligado a rede de 220 V/60 Hz dissipa 1.200 W, com fator de potência de 0,8. Determine:

- A potência aparente do circuito;
- A corrente do circuito;
- A potência reativa do circuito
- O valor da resistência e da capacitância

12. Um circuito constituído de um computador e seu monitor ligados em uma rede de 220V/60Hz dissipa 560 W, com fator de potência de 0,85. Determine para este circuito:

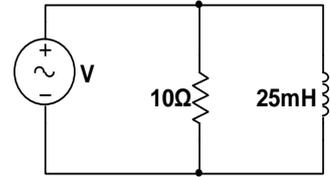
- A potência aparente;
- A corrente;
- A potência reativa

Se esta carga fosse modelada como um circuito RC paralelo qual seriam os seus valores de resistência e de capacitância?

13. O circuito ao lado está ligado à uma rede de 220 V/60 Hz.

Determine:

- As potências aparente, ativa e reativa do circuito;
- A corrente eficaz da fonte.



14. Um forno de indução de 15 kVA e fator de potência de 0,85 opera 24 horas por dia ao longo de todo o ano. Considerando uma tarifa de R\$ 0,35 /kWh calcule o custo da energia deste forno ao mês.

15. A potência ativa de uma instalação elétrica é de 2.500W. Se a tensão de alimentação é de 220V eficaz calcular a potência aparente e a corrente circulante quando:

12.1) FP = 0,95

12.2) FP = 0,6

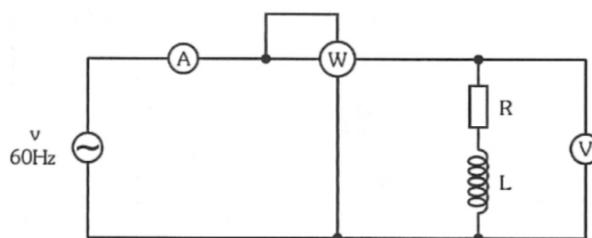
16. Em um circuito estão conectadas as cargas listadas abaixo em paralelo. Calcule as potências ativa, reativa e aparente totais e o fator de potência deste circuito.

- Um aquecedor resistivo de 1,5 kW;

- Dez lâmpadas fluorescentes totalizando 400 W, FP de 0,85 indutivo;

- Um motor de indução de 1,5 cv (1 cv = 0,736 kW), FP de 0,90 indutivo e rendimento de 92 % (a potência nominal do motor é relativa a entregue em seu eixo. Portanto, deve-se levar em conta o rendimento da máquina para a determinação da potência de entrada do mesmo).

17. No circuito abaixo a leitura dos instrumentos é $V=220$ V, $I=55$ A e $P=10$ kW. Calcular a potência aparente e o fator de potência do circuito.



18. Duas cargas estão ligadas em paralelo sujeitas a uma tensão de 660 VRMS. Ambas demandam uma potência que totaliza 52.800 W com um fator de potência de 0,80 adiantado. Uma das cargas absorve 40 kVA, com fator de potência atrasado de 0,96. Determine a corrente total do circuito. Qual é o fator de potência da outra carga?