

## Revisão: Representação por Fasores

Esta seção faz uma breve revisão sobre o uso de fasores para representação de sinais variantes no tempo.

≡ **Campos harmônicos-temporais ou harmônicos no tempo:** campos que variam periodicamente (de forma senoidal) no tempo.

≡ **Fasor:** É um número complexo  $z = a + jb = r\angle\theta = re^{j\theta} = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ , tal que

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

### Revisão de números complexos:

Os números complexos partem da definição:  $j = \sqrt{-1}$ .

Dados os números complexos  $z = x + jy = r\angle\phi$ ,  $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1\angle\phi_1$  e  $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2\angle\phi_2$ , as seguintes propriedades são definidas:

<b>Partes real e imaginária:</b>
$\Re\{z\} = x = \cos(\phi)$ e $\Im(z) = y = \sin(\phi)$
<b>Adição e subtração:</b>
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
<b>Multiplicação:</b>
$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle(\phi_1 + \phi_2)$
<b>Divisão:</b>
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle(\phi_1 - \phi_2)$
<b>Fórmula de Euler:</b>
$z = r \exp\{j\theta\} = re^{j\theta} = r \cos(\phi) + jr \sin(\phi)$

## Fasores de grandezas escalares

Para introduzir a variação temporal de um fasor, seja a variável definida como:

$$\phi(t) = \omega t + \theta(t, x, y, z)$$

em que  $\theta(t)$  pode ser uma função do espaço e/ou do tempo ou apenas uma constante. No caso de uma constante,

$$\phi(t) = \omega t + \theta$$

O número complexo  $z = r e^{j\phi(t)}$  fica definido como

$$z = r e^{j\phi(t)} = r e^{j(\omega t + \theta)} = r e^{j\omega t} e^{j\theta}$$

As partes reais e imaginárias de  $z$  ficam então definidas como:

$$\Re\{z\} = \Re\{r e^{j\phi(t)}\} = r \cos(\omega t + \theta)$$

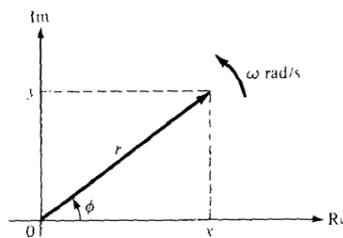
$$\Im\{z\} = \Im\{r e^{j\phi(t)}\} = r \sin(\omega t + \theta)$$

Assim, uma corrente elétrica variante no tempo perfeitamente senoidal pode ser representada como um fasor, pois

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$$I(t) = \Re\{I_0 e^{j\phi(t)}\}$$

$$I(t) = \Re\{I_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$



**Figure 9.12** Representation of a phasor  $z = x + jy = r / \phi$ .

## Fasores de grandezas vetoriais

Suponha um vetor  $\mathbf{A}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = A_0 \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{a}_y$$

É possível escrever o vetor  $\mathbf{A}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \Re\{A_0 e^{j(\omega t - \beta x)} \mathbf{a}_y\} = \Re\{A_0 e^{-\beta x} \mathbf{a}_y e^{j\omega t}\}$$

Podemos então definir a parcela  $\mathbf{A}_p = A_0 e^{-\beta x} \mathbf{a}_y$  como a **forma fasorial do vetor**  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ . Ou seja,

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \Re\{\mathbf{A}_p e^{j\omega t}\}$$

Note da equação anterior que a derivada temporal do vetor  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Re\{\mathbf{A}_p e^{j\omega t}\} = j\omega \Re\{\mathbf{A}_p e^{j\omega t}\}$$

Assim percebe-se que derivar um vetor no tempo consistem em multiplicar seu fasor por  $j\omega$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(x, y, z, t) \rightarrow j\omega \mathbf{A}_p$$

e analogamente:

$$\int \mathbf{A}(x, y, z, t) dt \rightarrow \frac{\mathbf{A}_p}{j\omega}$$

Observe que ao tratarmos de vetores cujas componentes são perfeitamente senoidais, a sua forma fasorial fica independente do tempo.

## Fasores em Eletromagnetismo

A partir de agora vamos trabalhar com as grandezas vetoriais de campos eletromagnéticos variantes no tempo usando a forma fasorial.

As grandezas de campo  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{D}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{J}(x, y, z, t)$  e  $\rho_v(x, y, z, t)$  e as suas derivadas podem ser expressas na forma fasorial usando as equações enfatizadas na seção anterior.

Na forma fasorial, as equações de Maxwell para campos eletromagnéticos harmônicos no tempo em um meio linear, isotrópico e homogêneo são apresentadas na tabela a seguir.

Equações de Maxwell na Forma Fasorial para Campos Harmônicos no Tempo	
Forma Pontual	Forma integral
$\nabla \cdot \mathbf{D}_p = \rho_v$	$\oint \mathbf{D}_p \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_v dv$
$\nabla \cdot \mathbf{B}_p = 0$	$\oint \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E}_p = -j\omega \mathbf{B}_p$	$\oint \mathbf{E}_p \cdot d\mathbf{L} = -j\omega \int \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \times \mathbf{H}_p = \mathbf{J}_p + j\omega \mathbf{D}_p$	$\oint \mathbf{H}_p \cdot d\mathbf{L} = \int (\mathbf{J}_p + j\omega \mathbf{D}_p) \cdot d\mathbf{S}$

Nessa tabela o fator  $e^{j\omega t}$  desaparece porque está associado com cada um dos termos das equações, e portanto se cancela nos dois membros.

Eis a justificativa do uso de fasores: para campos harmônico no tempo, o fator temporal pode ser omitido das equações e inserido em seus vetores quando necessário.

### Exercícios:

- 1) Sejam os vetores  $\mathbf{A} = 10 \cos(10^8 t - 10x + 60^\circ) \mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B}_p = \frac{20}{j} \mathbf{a}_x + 10e^{j2\pi x/3}$ ,

expresse

- a.  $\mathbf{A}$  na forma fasorial.

**Resposta:**  $\mathbf{A}_s = 10e^{j(60^\circ - 10x)} \mathbf{a}_z$

- b.  $\mathbf{B}_p$  na forma vetorial instantânea

**Resposta:**  $20 \sin(\omega t) \mathbf{a}_x + 10 \cos(\omega t + 2\pi x/3) \mathbf{a}_y$

- 2) Se  $\mathbf{P} = 2 \sin(10t + x - \pi/4) \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{Q}_p = e^{jx}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z) \sin(\pi y)$ , determine a forma fasorial de  $\mathbf{P}$  e a forma vetorial instantânea de  $\mathbf{Q}_p$ .

**Resposta:**  $\mathbf{P}_p = 2e^{j(x - \frac{3\pi}{4})} \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{Q} = \sin(\pi y) \cos(\omega t + x) (\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z)$

- 3) Em um meio caracterizado por  $\sigma = 0$  e  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , e

$$\mathbf{E} = 20 \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_y \text{ (V/m)}$$

Encontre  $\beta$  e  $\mathbf{H}$ .

**Resposta:**  $\beta = \pm \frac{2}{3}$  e  $\mathbf{H} = \pm \frac{1}{3\pi} \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_x \text{ (A/m)}$

- 4) Um meio é caracterizado por  $\sigma = 0$ ,  $\mu = 2\mu_0$  e  $\varepsilon = 5\varepsilon_0$ .

Se  $\mathbf{H} = 2 \cos(\omega t - 3y) \mathbf{a}_z \text{ (A/m)}$ , encontre  $\omega$  e  $\mathbf{E}$ .

**Resposta:**  $2.846 \times 10^8 \text{ rad/s}$  e  $-476.8 \cos(2.846 \times 10^8 t - 3y) \mathbf{a}_x \text{ (V/m)}$

## Propagação de Ondas Eletromagnéticas (EM)

A existência de ondas EM, prevista pelas equações de Maxwell, foi primeiramente investigada por Heinrich Hertz. Após muitos experimentos e cálculos, Hertz foi sucedido em gerar e detectar ondas de rádio, as quais são às vezes chamadas de ondas Hertzianas em sua homenagem.

**Em geral, ondas são formas de transportar energia ou informação.**

Exemplos típicos de ondas eletromagnéticas são: ondas de rádio, sinais de TV, raios de radar e raios de luz. Todas as formas de energia EM compartilham três características fundamentais:

- Todas se propagam em alta velocidade;
- Na propagação, assumem as propriedades de uma onda;
- Irradiam para fora (divergem pra fora) de uma fonte, sem uso de nenhum veículo físico discernível.

O objetivo agora é resolver as equações de Maxwell e derivar equações de onda EM em movimento para casos (meios de propagação) específicos.

Antes de analisar ondas em movimento em diferentes meios, precisamos entender o conceito de ondas em geral.

### Estudo genérico de ondas

*Uma onda é uma função tanto do espaço quanto do tempo.*

O movimento de uma onda ocorre quando um distúrbio no ponto  $A$  no instante  $t_0$  está relacionado com o que acontece no ponto  $B$  no tempo  $t > t_0$ . Uma equação de onda é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Em uma dimensão, a equação escalar da onda toma a forma de:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - u^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E} = 0$$

em que  $u$  é a *velocidade da onda*. Suas soluções tem a forma de:

$$\mathbf{E}^- = f(z - ut)$$

$$\mathbf{E}^+ = g(z + ut)$$

ou

$$\mathbf{E} = f(z - ut) + g(z + ut)$$

em que  $f$  e  $g$  denotam funções de  $z \pm ut$ . Exemplos dessas funções incluem  $z \pm ut$ ,  $\sin(k(z \pm ut))$ ,  $\cos(k(z \pm ut))$  e  $e^{jk(z \pm ut)}$ , em que  $k$  é uma constante. É possível mostrar que essas quatro funções podem, individualmente, satisfazer a solução da equação diferencial acima.

Assumindo dependência temporal harmônica (senoidal) do tipo  $e^{j\omega t}$  e usarmos a forma fasorial, a equação diferencial simplifica para:

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{E}_p + \beta^2 \mathbf{E}_p = 0$$

na qual  $\beta = \omega/\mu$  e  $\mathbf{E}_p$  é a forma fasorial de  $\mathbf{E}$ . As soluções são similares:

$$\mathbf{E}^+ = A e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$\mathbf{E}^- = B e^{j(\omega t + \beta z)}$$

$$\mathbf{E} = A e^{j(\omega t - \beta z)} + B e^{j(\omega t + \beta z)}$$

nas quais  $A$  e  $B$  são constantes.

Considere a solução  $\mathbf{E}^+ = A e^{j(\omega t - \beta z)}$ . A parte imaginária dessa equação é:

$$E = \Im\{\mathbf{E}^+\} = A \sin(\omega t - \beta z)$$

*\* arbitrário: pode ser feito com a parte real, resultando no cosseno.*

A última equação, da onda  $E$ , possui as seguintes características:

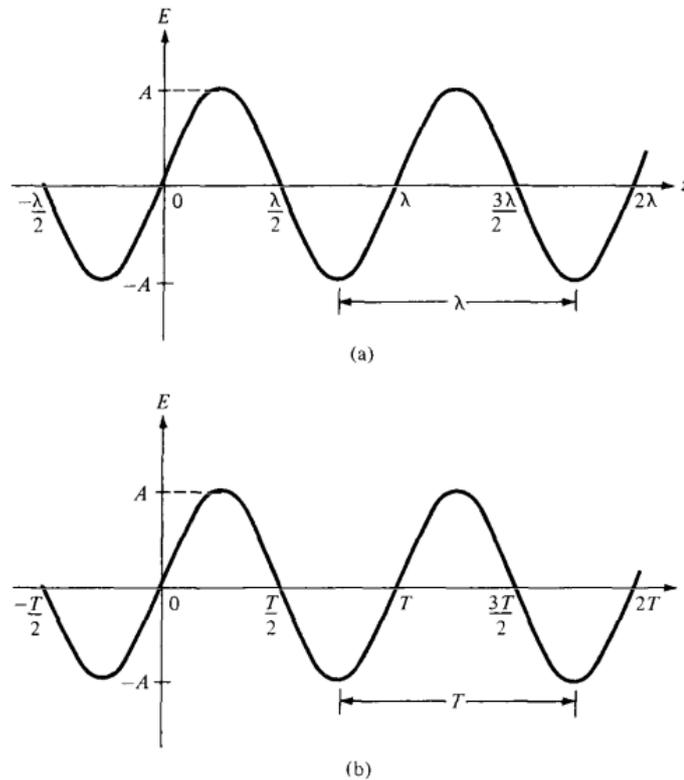
- é harmônica no tempo devido à hipótese inicial de dependência temporal caracterizada pela função  $e^{j\omega t}$ ;
- $A$  é a amplitude da onda e possui a mesma unidade de  $E$ ;
- $(\omega t - \beta z)$  é a fase da onda (em radianos), a qual depende do tempo  $t$  e da variável do espaço  $z$ ;
- $\omega$  é a frequência angular da onda (radianos por segundo) e  $\beta$  é a constante de fase ou número de onda (em radianos por metro)

$$(\omega t - \beta z) \rightarrow \text{rad}$$

$$\omega \rightarrow \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\beta \rightarrow \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Devido à variação tanto no tempo quanto no espaço, podemos plotar  $E$  em função de  $z$  mantendo  $t$  constante e vice-versa.



**Figure 10.1** Plot of  $E(z, t) = A \sin(\omega t - \beta z)$ : **(a)** with constant  $t$ , **(b)** with constant  $z$ .

No gráfico (a), observamos que o comprimento de  $z$  necessário para que a onda se repita (em relação à origem) é  $\lambda$  metros. Portanto,  $\lambda$  é chamado **comprimento de onda**.

No gráfico (b), o tempo para a onda se repetir é de  $T$  segundos. Chama-se então  $T$  de **período da onda**.

Já que a onda leva  $T$  segundos para viajar uma distância  $\lambda$  na velocidade  $\mu$ , espera-se que:

$$\lambda \text{ (m)} = uT \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} \right)$$

Lembrando ainda a definição de frequência (número de ciclos por segundo) como o inverso do período, ou seja,  $f = 1/T$  (Hz), podemos reescrever

$$u = f\lambda$$

Devido a essa relação fixa entre comprimento de onda e frequência, é possível identificar a posição de uma estação rádio-base dentro de sua banda tanto pela frequência quanto pelo comprimento de onda. Usualmente, prefere-se a frequência.

Utilizando relação anterior e a sequência de relações,

$$\omega = 2\pi f$$

$$\beta = \frac{\omega}{u}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

concluimos que

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda},$$

a qual mostra que para cada comprimento de onda propagado, a onda passa por uma variação de fase de  $2\pi$  radianos (um ciclo completo).

Veja que

- um sinal **negativo** em  $(\omega t \pm \beta z)$  indica a propagação da onda na **direção +z**,

enquanto

- um sinal **positivo** em  $(\omega t \pm \beta z)$  indica a propagação da onda na **direção -z**.

Um espectro de um sinal constitui-se da visualização de um largo número de frequências em ordem crescente. A tabela a seguir mostra em que faixas de frequências acontecem diferentes tipos de ondas EM. Ondas de rádio estão na parte inferior do espectro eletromagnético.

Quando as frequências aumentam, a manifestação de ondas EM se torna perigosa para seres humanos. Microondas, por exemplo, oferecem dano se não forem propriamente contidas. As dificuldades práticas do uso de energia EM para propósitos de comunicação também aumentam conforme as frequências aumentam, até que não possam mais ser utilizadas.

**TABLE 10.1** Electromagnetic Spectrum

<b>EM Phenomena</b>	<b>Examples of Uses</b>	<b>Approximate Frequency Range</b>
Cosmic rays	Physics, astronomy	$10^{14}$ GHz and above
Gamma rays	Cancer therapy	$10^{10}$ – $10^{13}$ GHz
X-rays	X-ray examination	$10^8$ – $10^9$ GHz
Ultraviolet radiation	Sterilization	$10^6$ – $10^8$ GHz
Visible light	Human vision	$10^5$ – $10^6$ GHz
Infrared radiation	Photography	$10^3$ – $10^4$ GHz
Microwave waves	Radar, microwave relays, satellite communication	3–300 GHz
Radio waves	UHF television	470–806 MHz
	VHF television, FM radio	54–216 MHz
	Short-wave radio	3–26 MHz
	AM radio	535–1605 kHz

Enquanto métodos de comunicação avançam, o limite para o uso das frequências vem sendo ampliado. Hoje as comunicações via satélite utilizam frequências próximo dos 14 GHz. Essas frequências estão ainda muito abaixo das frequências de luz, embora em um ambiente fechado e controlado de fibras óticas, a própria luz possa ser utilizada para comunicações de rádio.

## Exercícios

- 1) O campo elétrico no espaço livre é dado por

$$E = 50 \cos(10^8 t + \beta x) \mathbf{a}_y \text{ (V/m)}$$

- Encontre a direção de propagação da onda.
  - Calcule  $\beta$  e o tempo necessário para propagar a onda por uma distância  $\lambda/2$ .
  - Faça um esboço da onda nos tempos  $t = 0, T/4$  e  $T/2$ .
- 2) No espaço livre,  $\mathbf{H} = 0.1 \cos(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y$  (A/m).
- Calcule  $k, \lambda$  e  $T$
  - Calcule o tempo  $t_1$  que leva para a onda viajar  $\lambda/8$ .
  - Faça um esboço da onda em  $t_1$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] SADIKU, O. M. **Elements of Electromagnetics**. Cap. 9 e 10, 3ª ed., 2000.