

**Rafael Luchi Luz**

*Desenvolvimento de um ambiente virtual de estudo  
do eletromagnetismo aplicado*

São José – SC

março / 2013

**Rafael Luchi Luz**

***Desenvolvimento de um ambiente virtual de estudo  
do eletromagnetismo aplicado***

Monografia apresentada à Coordenação do  
Curso Superior de Tecnologia em Sistemas  
de Telecomunicações do Instituto Federal de  
Santa Catarina para a obtenção do diploma de  
Tecnólogo em Sistemas de Telecomunicações.

Orientador:

Prof. André Luiz Alves, Ms.

Co-orientador:

Prof. Wagner Barbosa Muniz, Dr.

CURSO SUPERIOR DE TECNOLOGIA EM SISTEMAS DE TELECOMUNICAÇÕES  
INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA

São José – SC

março / 2013

Monografia sob o título “*Desenvolvimento de um ambiente virtual de estudo do eletromagnetismo aplicado*”, defendida por Rafael Luchi Luz e aprovada em 21 de março de 2013, em São José, Santa Catarina, pela banca examinadora assim constituída:

---

Prof. André Luiz Alves, Ms.  
Orientador

---

Prof. Rubem Toledo Bergamo, Ms.  
Membro da banca examinadora

---

Prof. Jaci Destri, Eng. Ele.  
Membro da banca examinadora

# *Resumo*

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um *software*, que denotamos por SOEM, utilizando o método das diferenças finitas no domínio do tempo para aproximar as equações diferenciáveis de Maxwell, que descrevem a propagação das ondas eletromagnéticas. Primeiramente apresentamos o embasamento teórico necessário para compreensão do fenômeno de eletromagnetismo, discutindo as suas quatro leis fundamentais na forma diferencial e integral e as equações complementares: constitutivas e de contorno relacionando as propriedades físicas dos meios e os campos eletromagnéticos. Em seguida apresentamos o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), baseado no algoritmo de Yee, estudando em detalhes as condições de estabilidade, implementação de fontes e as condições de contorno absorventes que emulam um domínio infinito. O *software* SOEM, elaborado no Matlab, é baseado no FDTD e disponibiliza 5 módulos: um simulador em uma e duas dimensões, um simulador de radar de penetração terrestre (GPR), um módulo de onda espalhada e outro módulo exemplificando a perda de potência de um sinal ao atravessar uma parede.

Palavras-chave: equações de Maxwell, ondas eletromagnéticas, método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), condições de fronteiras absorventes, método de diferenças finitas.

# *Abstract*

In this work we intend to develop a software, denoted by SOEM, based on a method of finite-difference to approximate Maxwell's differential equations, which describe the propagation of electromagnetic waves. First we discuss the theoretical basis of electromagnetism, studying its four fundamental laws in both their differential and integral forms, as well as the constitutive relations and associated boundary conditions. We then present the method of finite-difference time-domain (FDTD), based on the algorithm of Yee, studying issues of stability, sources, and absorbing boundary conditions which emulate unbounded domains. The software SOEM, developed in MATLAB, is based on FDTD and has 5 modules, including two applications with ground-penetrating radar, and the simulation of loss of power through a wall.

Keywords: Maxwell's equations, electromagnetic waves, finite-difference time-domain methods, absorbing boundary conditions, finite-difference method

# *Sumário*

## **Lista de Figuras**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 9
1.1	Organização . . . . .	p. 10
<b>2</b>	<b>Eletromagnetismo</b>	p. 12
2.1	Convenções . . . . .	p. 12
2.2	Operador Nabla $\nabla$ . . . . .	p. 12
2.2.1	Gradiente . . . . .	p. 12
2.2.2	Divergente . . . . .	p. 13
2.2.3	Rotacional . . . . .	p. 13
2.3	Teorema de Stokes . . . . .	p. 13
2.4	Sistema internacional de unidades - SI . . . . .	p. 14
2.5	Grandezas físicas . . . . .	p. 14
2.6	Equações de Maxwell . . . . .	p. 18
2.7	Condições de Contorno e/ou transmissão . . . . .	p. 21
2.8	Formulação explícita das componentes da equação de Maxwell em coordenadas cartesianas . . . . .	p. 22
2.9	Modos transversais (equações de Maxwell em 2D) . . . . .	p. 25
<b>3</b>	<b>Métodos das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo</b>	p. 28
3.1	Formulação do método . . . . .	p. 28
3.2	O algoritmo de Yee . . . . .	p. 29

3.2.1	Algoritmo de Yee para duas dimensões . . . . .	p. 33
3.3	Condições absorventes nas fronteiras . . . . .	p. 35
3.3.1	Condições de contorno de Mur em duas dimensões . . . . .	p. 36
3.3.2	Condições de contorno de Mur em diferenças finitas . . . . .	p. 37
3.4	Precisão e estabilidade . . . . .	p. 40
3.5	Excitação . . . . .	p. 42
<b>4</b>	<b>Implementação do método</b>	p. 43
4.1	Grades de campos elétricos e magnéticos . . . . .	p. 43
4.2	Inicialização . . . . .	p. 44
4.3	Software de Ondas Eletromagnéticas - SOEM . . . . .	p. 44
4.3.1	Simulador em duas dimensões . . . . .	p. 45
4.3.2	Simulador em uma dimensão . . . . .	p. 46
4.3.3	Simulador de radar de penetração terrestre . . . . .	p. 47
4.3.4	Simulador da onda atravessando uma parede . . . . .	p. 48
4.3.5	Simulador de onda refletida . . . . .	p. 50
4.4	Fontes . . . . .	p. 52
4.5	Simulações e resultados . . . . .	p. 54
4.5.1	Simulação com GPR . . . . .	p. 54
4.5.2	Testes realizados na camada absorvente . . . . .	p. 55
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	p. 57
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 58

# *Lista de Figuras*

2.1	Campo magnético produzido por um ímã permanente ( <a href="http://aulasdefisicafelipe.blogspot.com.br">aulasdefisicafelipe.blogspot.com.br</a> )	p. 19
2.2	Campo Elétrico de uma onda plana com frequência de 1Ghz em um espaço livre com aproximadamente 5 centímetros.	p. 24
2.3	Perturbação gerada por uma objeto metálico, com tamanho de meio cm, na mesma onda.	p. 24
2.4	Onda refletida após passagem da frente de onda pelo objeto.	p. 25
2.5	Fonte pontual ( <a href="http://www.mundomax.com.br">www.mundomax.com.br</a> )	p. 25
2.6	Propagação em duas dimensões	p. 26
3.1	Derivada Central(OLIVEIRA, 2003)	p. 29
3.2	Campo elétrico e campo magnético representados no tempo e no espaço	p. 31
3.3	Célula estruturada de Yee(LIMA, 2006)	p. 32
3.4	Face da célula de Yee para cálculo computacional(LIMA, 2006)	p. 33
3.5	Face da célula de Yee do modo transversal elétrico	p. 34
3.6	Face da célula de Yee do modo transversal magnético	p. 34
3.7	Malha do FDTD no modo transversal magnético	p. 35
3.8	Propagação da onda em uma dimensão com grade sem uso de ABC's	p. 39
3.9	Propagação da onda em dimensão com grade com uso de ABC's	p. 39
3.10	Propagação da onda em duas dimensão com grade sem uso de ABC's	p. 40
3.11	Propagação da onda em duas dimensão com grade com uso de ABC's	p. 40
3.12	Ângulo de propagação (LIMA, 2006)	p. 41
4.1	Valores de entrada	p. 44
4.2	Tela inicial do <i>software</i>	p. 45



4.3	Módulo de simulador da onda em duas dimensões . . . . .	p. 46
4.4	Módulo de simulador da onda em duas dimensões . . . . .	p. 47
4.5	Módulo simulador de GPR . . . . .	p. 48
4.6	Módulo simulador da onda atravessando uma parede . . . . .	p. 48
4.7	Simulação com 13 pontos por comprimento de onda . . . . .	p. 49
4.8	Simulação com 46 pontos por comprimento de onda . . . . .	p. 49
4.9	Módulo de simulador da onda atravessando uma parede . . . . .	p. 50
4.10	Limites das grades de campo . . . . .	p. 51
4.11	Gráfico da função da equação 4.9 . . . . .	p. 53
4.12	Pulso gaussiano com parte positiva e parte negativa . . . . .	p. 53
4.13	Campo elétrico captado num ponto sobre a terra na simulação do GPR com objeto . . . . .	p. 54
4.14	Campo elétrico captado num ponto sobre a terra na simulação do GPR sem objeto . . . . .	p. 55
4.15	Campo elétrico captado num ponto específico da área simulada . . . . .	p. 55
4.16	Campo elétrico captado num ponto específico da área simulada . . . . .	p. 56

# 1 *Introdução*

Quando falamos ao celular, nossa voz é digitalizada e transmitida através de uma OEM<sup>1</sup>. Sabemos que há inúmeros pontos em nossas residências em que não conseguimos obter uma boa conversação, e neste caso procuramos lugares mais altos e abertos para obter melhores sinais. A partir destas observações, surgem questões como: Qual o caminho percorrido por uma onda eletromagnética? Porque há tantas áreas sem sinal em edifícios? Qual o melhor local a se instalar um roteador *wireless* para obter melhor cobertura? É difícil responder essas perguntas apenas observando o ambiente ao seu redor.

Esta dificuldade na abstração desse fenômeno, dificultou o desenvolvimento da teoria clássica do eletromagnetismo. Outra razão deste retardo é que suas aplicações práticas só apareceram preponderantemente no final do século XIX. Foi nesse período que motores elétricos e redes urbanas começaram a ser desenvolvidos e implementados, constituindo assim um marco do ponto de vista tecnológico na forma de vida da sociedade na época.

James Clerk Maxwell (1831-1879) nascido em Edimburgo, foi um físico matemático que estabeleceu um conjunto de equações que descrevem o fenômeno denomina eletromagnetismo, iniciada pelos trabalhos desenvolvidos principalmente por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), André Marie Ampère (1775-1836), Michel Faraday (1791-1867) e Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865)(JIN, 2011). Em 1862, Maxwell introduziu a noção de corrente de deslocamento, dando suporte as ondas eletromagnéticas. A forma das equações conhecidas hoje foram reformuladas por Oliver Heaviside (1850-1925), que estabeleceu um grupo de quatro equações, batizadas de *Equações de Maxwell*.

As equações de Maxwell descrevem diversos fenômenos físicos (BALANIS, 1989), e conhecendo apenas as quatro equações e algumas relações complementares, referente a influência do meio nos campos, temos uma ferramenta completa, podendo com elas modelar a propagação das ondas eletromagnéticas até o campo gerado por um ímã permanente. No entanto, as diversas situações físicas como geometrias com pequenas variações e materiais com diferentes

---

<sup>1</sup>Onda eletromagnética

características, podem gerar problemas de difícil solução.

Em 1966, Kane Yee (YEE, 1966) apresentou um modelo de discretização das equações de Maxwell, de simples compreensão e aplicação, que facilitaria as simulações envolvendo OEM. Entretanto, tendo em vista que nessa época os computadores não apresentavam um desempenho satisfatório para estes cálculos, esse método não suscitou interesse na comunidade científica. Com o avanço em *softwares* matemáticos e na capacidade dos computadores nos últimos anos, as pesquisas relacionadas ao eletromagnetismo e à utilização do modelo de discretização de Yee ganharam espaço no meio científico e tecnológico.

Neste trabalho pretendemos desenvolver um *software* que utilizará o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD<sup>2</sup>) para resolver as derivadas parciais presentes nas equações de Maxwell utilizando o algoritmo de Yee (TAFLOVE, 1995), que seja capaz de simular a propagação da onda eletromagnética em uma e duas dimensões, em diferentes meios. O *software* deverá servir como uma ferramenta tanto para simulações de problemas simples de fins didáticos, como para problemas de eletromagnetismo reais e possivelmente problemas mais complexos, como: propagação da onda meios distintos, guias de onda, cavidades ressonantes, entre outros.

## 1.1 Organização

Este trabalho está dividido em três capítulos, além da introdução e conclusão. O capítulo 2 apresenta as definições básicas do eletromagnetismo, úteis para compressão dos capítulos seguintes. As quatro equações de Maxwell na forma diferencial e integral, que são a base para a propagação da onda eletromagnética.

O capítulo 3 apresenta o método numérico das diferenças finitas (FDTD) que Yee utilizou para discretizar as equações de Maxwell em três dimensões. Discutir as simplificações devido a simetria dos domínios espaciais quando utilizamos a formulação para duas dimensões. Apresenta os campos elétricos e magnéticos em forma computacional, discretizados como elementos de uma matriz. Apresenta alguns problemas quando passado para forma computacional, como: precisão, estabilidade e as condições absorventes para as bordas da matriz (ABC)<sup>3</sup>.

O capítulo 4 apresenta o Software de Onda Eletromagnéticas - SOEM<sup>4</sup> onde implementamos o método FDTD em uma e duas dimensões utilizando o ambiente do Matlab. O SOEM

---

<sup>2</sup>Do inglês finite difference times domain

<sup>3</sup>Do inglês Absorbing Boundary Condition

<sup>4</sup>Software de Onda Eletromagnética

---

contém cinco módulos: um simulador em uma e duas dimensões, um simulador de radar de penetração terrestre (GPR), um módulo de onda espalhada e outro módulo exemplificando a perda de potência de um sinal ao atravessar uma parede. Apresenta os tipos de fontes para gerar a OEM que melhor se ajuste no método numérico. Por fim no capítulo 5 as considerações finais e algumas propostas para trabalho futuros.

## 2 *Eletromagnetismo*

No estudo da Física, eletromagnetismo é o nome dado à teoria unificada desenvolvida por James Maxwell. Ele estabeleceu uma relação entre as teorias da eletricidade e do magnetismo. Este capítulo apresentará as equações de Maxwell e como os campos elétrico e magnéticos estão relacionados, formando assim a onda eletromagnética. Serão adotadas algumas convenções e definições que ajudarão a compreender o assunto.

### 2.1 Convenções

Algumas das convenções que utilizamos no texto são as seguintes:

- Grandezas escalares: letra em itálico; por exemplo,  $t$  (tempo) e  $I$  (corrente);
- Grandezas vetoriais: letra em negrito; por exemplo,  $\mathbf{H}$  (campo magnético) e  $\mathbf{n}$  (vetor normal a uma superfície);
- Produto escalar: através de “.”; por exemplo,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ;
- Produto vetorial: através de “ $\times$ ”; por exemplo,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ;

### 2.2 Operador Nabla $\nabla$

#### 2.2.1 Gradiente

O gradiente de uma função escalar  $U$  é obtida multiplicando-o por um vetor cujas coordenadas cartesianas são:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

Esse vetor é formalmente chamado de operador nabla "∇", onde **i**, **j** e **k** são vetores unitários ortogonais do sistema cartesiano (BASTOS, 2004). Seja uma função  $U(x, y, z)$  escalar dependente das coordenadas  $x, y$  e  $z$  e assumindo que são diferenciáveis, o gradiente da função  $U$  é obtido aplicando o operador  $\nabla$ , representado por:

$$\text{grad}U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.2)$$

### 2.2.2 Divergente

A divergência de um campo vetorial **A**, de componentes  $A_x, A_y$  e  $A_z$  é obtido pelo produto escalar, representado pelo operador  $\nabla$ , de acordo com a equação:

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

O resultado é uma grandeza escalar que contém o somatório das derivadas das componentes  $x, y$  e  $z$  deste vetor.

### 2.2.3 Rotacional

O rotacional do vetor **A** é obtido pelo produto vetorial, representado pelo operador  $\nabla$  segundo a equação 2.4:

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.4)$$

Aplicando o produto vetorial, temos:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (2.5)$$

## 2.3 Teorema de Stokes

O teorema mostra que à circulação de um vetor **A** ao longo de um caminho  $L(S)$  que delimita uma superfície é igual ao fluxo do rotacional de **A** que atravessa esta superfície.

$$\oint_{L(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.6)$$

Este teorema será utilizado para obter as equações de Maxwell na forma de integral, no livro do João P.A. Bastos (BASTOS, 2004) temos a demonstração do resultado.

Essas noções matemáticas são necessárias para entender os conceitos de eletromagnetismo abordados no decorrer deste trabalho.

## 2.4 Sistema internacional de unidades - SI

O sistema internacional de unidades é a forma moderna do sistema métrico, possui sete unidades básicas e da conveniência do número dez. É o sistema mais usado do mundo de medição, tanto no comércio diariamente como na ciência. O SI é um conjunto sistematizado e padronizado de definições para unidades de medida. São elas: metro para comprimento, quilograma para massa, segundo para tempo, ampère para corrente elétrica, kelvin para temperatura termodinâmica, candela para intensidade luminosa, mole para a quantidade de substância.

## 2.5 Grandezas físicas

Descrevemos a seguir as grandezas físicas que estão presentes nas equações de Maxwell: o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , indução elétrica  $\mathbf{D}$  (densidade de fluxo elétrico), campo magnético  $\mathbf{H}$ , indução magnética  $\mathbf{B}$  (densidade de fluxo magnético), densidade superficial de corrente  $\mathbf{J}$ , densidade volumétrica de carga  $\rho$ , permeabilidade magnética  $\mu$ , permissividade elétrica  $\epsilon$ , condutividade elétrica  $\sigma$ . A tabela abaixo apresenta as unidades destas grandezas físicas:

Tabela 2.1: Tabela de Unidades

Grandeza	Unidade	Descrição
Campo elétrico	$V/m$	Volts por metro
Campo magnético	$A/m$	Ampères por metro
Permissividade	$F/m$	Farad por metro
Indução elétrica	$C/m^2$	Coulomb por metro quadrado
Permeabilidade	$H/m$	Henry por metro
Indução magnética	$T$	Tesla
Fluxo magnético	$Wb$	Weber
Densidade superficial de corrente	$A/m^2$	Ampères por metro quadrado
Densidade volumétrico de carga	$C/m^3$	Coulomb por metro cúbico
Condutividade elétrica	$S/m$	Siemens por metro

### O campo elétrico $E$

Campo elétrico é a força provocada por uma carga ou um conjunto delas  $Q$ , podendo ser elétrons, prótons ou íons. Representado pela letra  $E$ .

### O campo magnético $H$

Um conjunto de cargas elétricas em deslocamento, num fio condutor por exemplo, gera um campo magnético, que rotaciona este fio. O campo magnético possui tanto uma direção quanto uma magnitude (ou força). Portanto é um campo vetorial, representado pela letra  $H$ .

### Permissividade elétrica $\epsilon$

Permissividade elétrica ou constante dielétrica é a capacidade de suscetibilidade de um meio a passagem de fluxo elétrico. Se houver um campo elétrico atuando em algum material, quanto maior for sua permissividade, maior será a indução elétrica ao longo de sua superfície.

Em materiais dielétricos a permissividade varia relativamente pouco, enquanto a permeabilidade magnética pode ter uma maior escala de variação, chegando na ordem de  $10^4$  (BASTOS, 2004). Isso significa que as características elétricas de diferentes materiais e relativamente próximas, enquanto as magnéticas podem variar significativamente de um material para outro. Na tabela 2.2 temos a permissividade relativa de alguns materiais que utilizamos para elaboração do software:



Tabela 2.2: Tabela de Permissividade

Material	$\epsilon_r$
Vácuo	1
Ar	$\approx 1$
Solo seco	2.8
Água	81
Vidro	6

Chamamos de permissividade relativa, pois mostramos apenas a variação deste material em relação ao valor de referência. É utilizado como referência a permissividade do vácuo, por se tratar de tipo especial de dielétrico linear (GRIFFITHS, 1999). Para sabermos o valor absoluto de cada material utilizamos a formula 2.7:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad (2.7)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo de valor:

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} [F/M] \quad (2.8)$$

### Indução Elétrica $\mathbf{D}$

Dado um material cuja permissividade é conhecida, podemos calcular a indução elétrica, gerada neste meio por um campo elétrico através da formula:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} [C/m^2] \quad (2.9)$$

### Permeabilidade magnética $\mu$

A permeabilidade  $\mu$  de um meio indica a suscetibilidade à passagem de fluxo magnético. Se tivermos um campo magnético atuando em um meio, quanto maior a permeabilidade deste meio, maior será o fluxo que passará em sua seção. A permeabilidade do vácuo é:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m] \quad (2.10)$$

Assim como a permissividade, obtemos a permeabilidade relativa do meio em relação ao

$\mu_0$ . Observamos na tabela 2.3 valores da permeabilidade relativa do meio:

Tabela 2.3: Tabela de Permeabilidade

Material	$\mu_r$
Vácuo	1
Ar	$\approx 1$
Solo seco	0,0001
Água	0,9999
Vidro	1

### Indução magnética $\mathbf{B}$

Um objeto, fio metálico por exemplo, quando inserido num espaço onde atua um campo magnético, sofre a formação da indução magnética calculada pela formula 2.11:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} [T] \quad (2.11)$$

Representada pela letra  $\mathbf{B}$ . Sabendo a seção transversal  $S$  e a indução magnética, chegamos ao fluxo magnético ao longo deste fio:

$$\phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} [Wb] \quad (2.12)$$

### A densidade superficial de corrente $J$

Dado um fio retilíneo de seção  $S$  percorrido por uma corrente elétrica  $I$ , obtemos  $\mathbf{J}$  através da relação  $\frac{I}{S}$ . Se definirmos um vetor unitário  $\mathbf{u}$  perpendicular à seção  $S$ , temos então um vetor  $\mathbf{J} = J\mathbf{u}$ . Assim o somatório do fluxo  $\mathbf{J}$  através de  $S$  nos fornece  $I$ :

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} [A] \quad (2.13)$$

### A densidade volumétrica de carga $\rho$

Supondo que um somatório de cargas  $Q$  ocupe um volume  $V$ , temos a densidade volumétrica de carga pela relação  $\rho = \frac{Q}{V}$ . Considerando que as cargas podem não estar distribuídas uniformemente no volume em questão temos que:

$$Q = \int_v \rho \cdot dv [C] \quad (2.14)$$

### A condutividade elétrica $\sigma$

Em problemas de campos elétricos, podemos analisar a atuação do campo em dois meios (isolantes e meios condutores). Os meios condutores são caracterizados por sua condutividade  $\sigma$ , ela expressa a capacidade do meio conduzir mais ou menos corrente elétrica. Já os meios isolantes tem o valor de  $\sigma$  próximo a zero, então são principalmente caracterizados por  $\epsilon$ . Podemos obter a densidade superficial de corrente  $\mathbf{J}$ , através da formula 2.15, que é chamada “lei de Ohm” sob forma local:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.15)$$

## 2.6 Equações de Maxwell

Apresentamos as quatro equações que sintetizam o comportamento físico das grandezas eletromagnéticas em um meio isotrópico (meio em que as propriedades permanecem as mesmas em qualquer direção), assim temos:

### 1. Lei de Gauss

A lei de Gauss estabelece uma relação entre o fluxo de campo elétrico que atravessa uma superfície fechada com o volume de carga elétrica limitada por esta superfície.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.16)$$

substituindo  $\mathbf{D}$  por  $\epsilon \mathbf{E}$ , temos:

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho \quad (2.17)$$

Esta equação mostra que o divergente total da indução elétrica é igual a densidade de carga elétrica  $Q$  contida no volume limitado pela superfície.

### 2. Lei de Gauss do Magnetismo

Campos magnéticos são representados por uma corrente fechada de vetores, onde o somatório dos vetores que saem desta região é igual ao somatório dos vetores que entram, esta configuração é chamada de dipolo magnético.

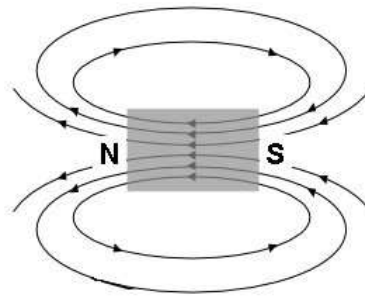


Figura 2.1: Campo magnético produzido por um ímã permanente  
(aulasdefisicafelipe.blogspot.com.br)

Separando este dipolo em positivo e negativo, temos que todas as linhas de campo que saem do polo positivo entram no negativo, portanto elas se anulam. É o que apresenta a equação 2.18:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.18)$$

substituindo  $\mathbf{B}$  por  $\mu\mathbf{H}$ , temos:

$$\nabla \cdot \mu\mathbf{H} = 0 \quad (2.19)$$

A equação 2.19 mostra que o divergente do campo magnético induzido em um material com permeabilidade  $\mu$  é nulo.

### 3. Lei de Faraday

A lei de Faraday descreve como um campo magnético variante no tempo, induz um campo elétrico. Esta indução eletromagnética é o princípio operante por trás de muitos geradores de energia elétrica. A fórmula da lei de Faraday é a seguinte:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.20)$$

O sinal negativo indica que o campo elétrico gerado tende a se opor ao campo magnético que o gerou.

### 4. Lei de Ampère

A lei de Ampère original, afirma que campos magnéticos podem ser gerados através de correntes elétricas. O que Maxwell propôs em seus estudos foi introduzir que os campos elétricos que variam no tempo também geram campos magnéticos. A correção que

Maxwell propôs a lei de Ampère é o que dá suporte a teoria das ondas eletromagnéticas. Significa que, um campo magnético variante no tempo cria um campo elétrico e vice versa.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.21)$$

A equação 2.21 nos mostra que o campo magnético pode ser gerado a partir da corrente superficial  $\mathbf{J}$  e da variação temporal da indução elétrica  $\mathbf{D}$ .

As equações 2.20 e 2.21 modelam a onda eletromagnética, uma vez que existe essa variação no tempo, os campos sempre existirão.

Agora representamos estas mesmas equações na forma de integral. Em alguns problemas como conhecer  $\mathbf{H}$  criado por  $\mathbf{J}$ , pode ser mais conveniente utilizar as equações de Maxwell nesta forma.

### 1. Lei de Faraday

Supondo uma superfície  $S$  onde atuam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , aplicando a integração nesta superfície, temos:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.22)$$

Aplicando o teorema de Stokes no lado esquerdo da igualdade, temos:

$$\oint_{L(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.23)$$

Para explicar esta fórmula, podemos imaginar uma espira que envolva esta superfície de comprimento  $L(S)$ , o campo elétrico induzido nesta espira é proporcional ao número de linhas do fluxo que atravessa a superfície envolvida do circuito, na unidade de tempo. Do lado esquerdo da igualdade temos que:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U \quad (2.24)$$

Verificamos nesta fórmula que temos a formação de uma força eletromotriz nas extremidades da espira gerada pela circulação do campo elétrico na mesma. No outro lado da igualdade temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = -U \quad (2.25)$$

Comprovamos que o somatório do campo magnético nesta superfície é igual a variação temporal do fluxo magnético neste meio, gerando força eletromotriz. Esta última fórmula é conhecida como lei de Faraday, pois foi ele que evidenciou este fenômeno.

## 2. Lei de Ampère

Supondo uma superfície  $S$  onde atua  $\mathbf{H}$  e este induz  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{D}$ , aplicando a integração nesta superfície, temos:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.26)$$

Aplicando o teorema de Stokes no lado esquerdo da igualdade, temos:

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.27)$$

Podemos dividir a parte da direita da igualdade em duas partes:  $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ , chamado de corrente de condução e  $I_d = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$ , chamado de corrente de deslocamento. Para calcular o campo magnético total em uma determinada área envolvida por um fio condutor, utiliza o somatório da corrente que passa pelo fio condutor.

## 2.7 Condições de Contorno e/ou transmissão

Quando simulamos a propagação da onda entre dois meios diferentes, precisamos satisfazer algumas relações de contorno entre esses meios (JIN, 2002). Essas relações são obtidas pelas equações de Maxwell na forma integral. As condições de contorno dão as informações necessárias para obter a solução dos problemas, criando um limite entre as regiões de estudo.

Para simulações com diferentes meios, com permissividade dielétrica e permeabilidade magnética distintas, as condições de contorno na borda que limitam essas duas regiões são:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal em relação aos campos.

Supondo que uma das regiões seja um condutor perfeito (PEC<sup>1</sup>) onde temos  $\sigma = \infty$ , e considerando que um condutor perfeito não pode sustentar campos internos, temos:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.29)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.30)$$

assim os campos eletromagnéticos são refletidos na fronteira do condutor. Nas bordas há formação de uma corrente superficial de carga, dada por:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (2.31)$$

$$\rho_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \quad (2.32)$$

Além das relações constitutivas, das condições de contorno e eventuais fontes, as equações de Maxwell devem ser complementadas por condições iniciais onde os campos magnético e elétrico iniciais  $H(x, y, z, (t = 0))$  e  $E(x, y, z, (t = 0))$  são assumidos, conhecidos e fisicamente compatíveis.

## 2.8 Formulação explícita das componentes da equação de Maxwell em coordenadas cartesianas

Conforme já mencionado, as leis de Faraday e Amère modelam a propagação da onda eletromagnética. Substituindo os valores de  $\mathbf{B}$  por  $\mu\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  por  $\sigma\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  por  $\epsilon\mathbf{E}$ , e assumindo que  $\mu$ ,  $\epsilon$  e  $\sigma$  independe de  $t$ , chegamos as seguintes equações:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.34)$$

Aplicando as definições de rotacional na equação 2.34:

---

<sup>1</sup>Do inglês perfect conductor

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (2.35)$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.36)$$

Separando o campo magnético nas direções  $x, y$  e  $z$ , temos:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.39)$$

Aplicando as definições de rotacional na equação 2.33 e separando o campo elétrico nas direções  $x, y$  e  $z$ , temos:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (2.42)$$

Estas equações descrevem a propagação da onda em três dimensões. Para simulações em geral, utiliza-se as equações em duas dimensões, pois conseguimos ter uma boa aproximação do comportamento da onda com baixo custo computacional, por exemplo, uma OEM atravessando algum obstáculo ou passando por diferentes meios. A seguir apresentamos três figuras onde verificamos o comportamento da onda que possui frequência de 1Ghz propagando livremente, figura 2.2, e nas figuras 2.3 e 2.4 ao se deparar com um objeto metálico:



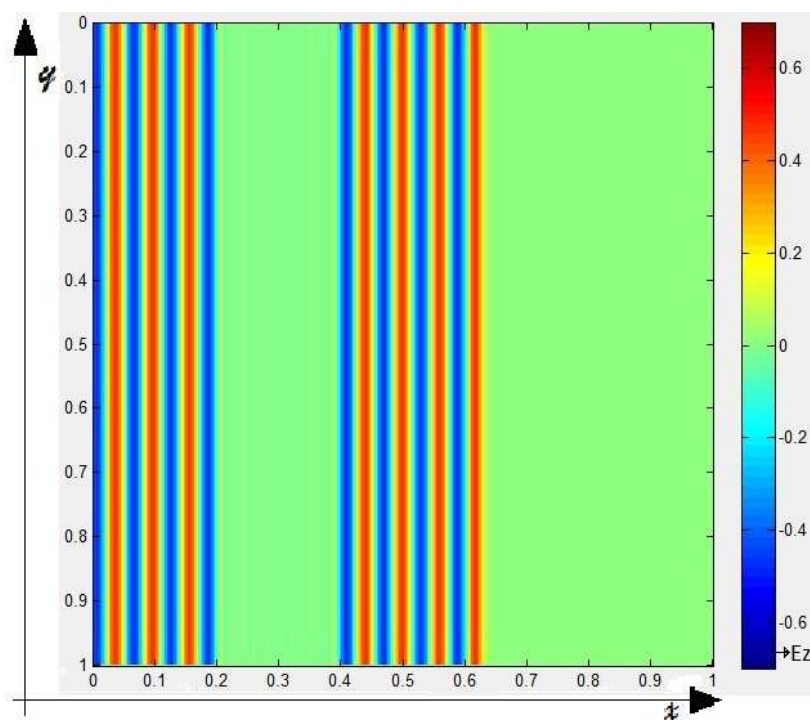


Figura 2.2: Campo Elétrico de uma onda plana com frequência de 1Ghz em um espaço livre com aproximadamente 5 centímetros.

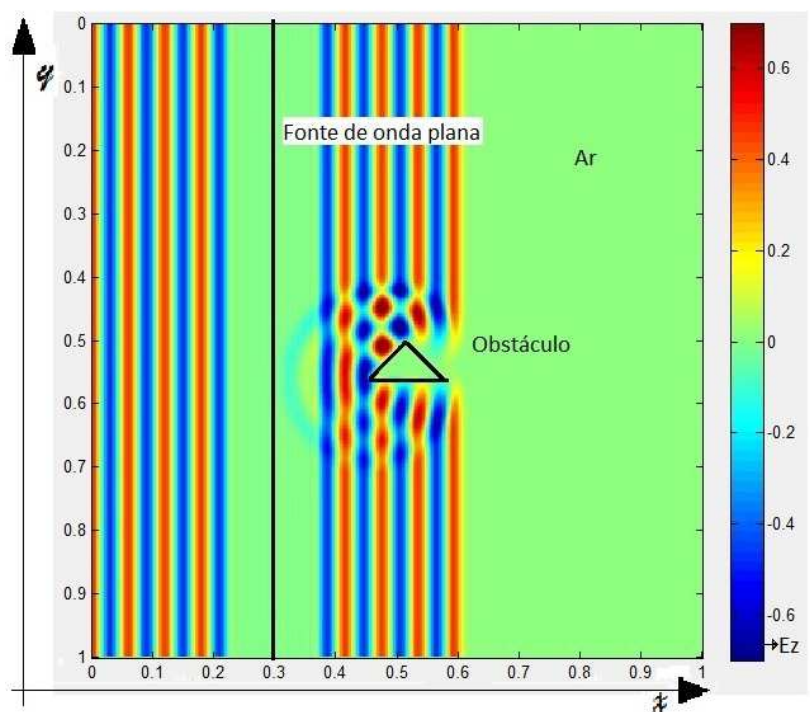


Figura 2.3: Perturbação gerada por uma objeto metálico, com tamanho de meio cm, na mesma onda.

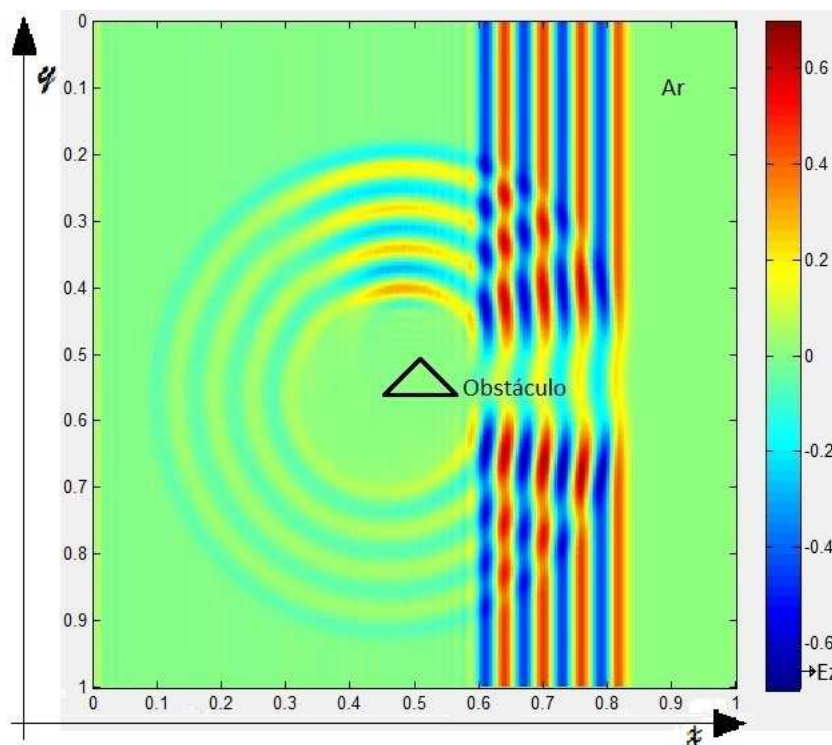


Figura 2.4: Onda refletida após passagem da frente de onda pelo objeto.

## 2.9 Modos transversais (equações de Maxwell em 2D)

Se conseguirmos gerar uma OEM a partir de uma fonte pontual, esta propagaria com uma forma esférica com centro na fonte. Isso se dá pelo fato de que os campos elétricos e magnéticos tem componentes nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

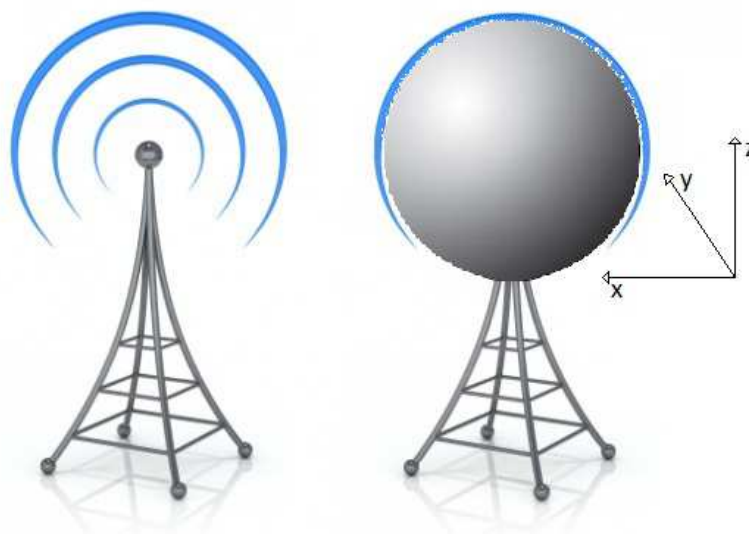


Figura 2.5: Fonte pontual (www.mundomax.com.br)

Se fizermos um corte reto no centro desta esfera, paralelo ao eixo do  $z$ , vamos ter componentes de campo variando em  $x$  e  $y$  e independentes em relação a  $z$ . Se observarmos a propagação da onda, apenas neste corte, teremos uma propagação apenas em duas dimensões, dependendo de  $x$  e  $y$ .

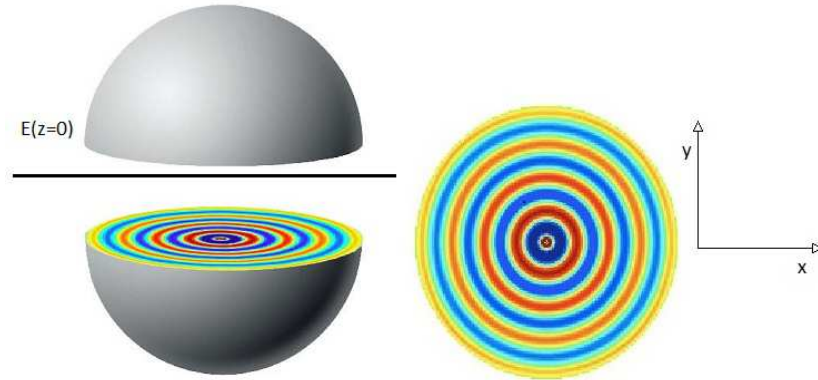


Figura 2.6: Propagação em duas dimensões

Para representarmos a onda em duas dimensões, existem dois modos mais comuns a ser utilizado. Considerando que a esfera representa a propagação do campo elétrico teremos o modo transversal elétrico - TE (campo elétrico com direção normal de deslocamento), no caso da esfera representar o campo magnético, teremos o modo transversal magnético - TM (campo magnético com direção normal de deslocamento). Com eixo  $Z$  fixo, podem ser removidas as dependências da variável  $z$  nas equações, de forma que no modo TE necessita apenas dos campos  $H_z, E_x$  e  $E_y$ :

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (2.45)$$

e para o modo TM apenas dos campos  $E_z, H_x$  e  $H_y$ , resultando nas seguintes equações:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x \right) \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (2.48)$$

Em duas dimensões podemos optar por um dos dois modos para realizar uma simulação. Em uma dimensão, temos a dependência de apenas uma coordenada, reduzindo a formulação em duas equações:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (2.50)$$

Em uma dimensão temos a dependência em apenas um eixo cartesiano, neste caso o eixo  $x$ , no próximo capítulo vamos apresentar o método numérico para resolver essas derivadas utilizando ferramentas computacionais.

### 3 *Métodos das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo*

O Métodos das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo é uma técnica onde obtêm-se uma aproximação das derivadas através da discretização do seu domínio. Em 1966 Kane Yee apresentou um modelo de discretização das equações de Maxwell mas devido aos sistemas computacionais da época serem muitos caros, sua pesquisa não gerou interesses na população científica daquela época. Atualmente com os baixos custos dos computadores, processadores com alto rendimento, desenvolvimento de técnicas eficientes de truncagem do método FDTD e o surgimento de *software* livres e de código aberto, houve um crescimento exponencial nas pesquisas e trabalhos em diversos campos de conhecimento utilizando o modelo de Yee.

Este método aplicado nas equações de Maxwell discretiza a área a ser analisada, gerando um conjunto de matrizes com um número finito de elementos, que representam valores de campo e propriedades do meio, semelhante com o que ocorre na produção digital de um vídeo, em que cada quadro do filme é um conjunto com número finito de pontos amostrados da imagem real, que contêm na verdade infinitos pontos. Cada quadro corresponde ao um instante de tempo discreto do processo (OLIVEIRA, 2003).

#### 3.1 **Formulação do método**

O método é baseado na série de Taylor para aproximação das derivadas em diferenças finitas. Podemos encontrar a derivada de  $f(x)$ , uma função finita e contínua, a partir da expansão em série de Taylor, como mostraremos a seguir:

$$f(x + \Delta_x) = f(x) + \Delta_x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2!} \Delta_x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{3!} \Delta_x^3 \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \dots \quad (3.1)$$

$$f(x - \Delta_x) = f(x) - \Delta_x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2!} \Delta_x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{1}{3!} \Delta_x^3 \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \dots \quad (3.2)$$

Subtraindo a equação 3.1 pela 3.2 obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} - \left( \frac{1}{6}\Delta x^2 \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots \right) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.3)$$

Na equação 3.3 o termo da direita  $O(\Delta x^2)$  possui o incremento espacial elevado a potências iguais a 2. Este valor é o erro adicionado no valor da derivada obtida pelo método, próximo de zero. Excluindo este termo da expressão temos uma aproximação da derivada com erro de ordem quadrática. Assim temos a seguinte equação:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.4)$$

Que é chamada de derivada central.

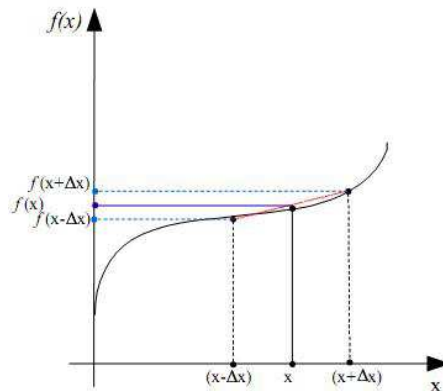


Figura 3.1: Derivada Central(OLIVEIRA, 2003)

A Figura 3.1 indica que a derivada central é obtida pela inclinação da reta que intercepta os pontos  $(x-\Delta x)$  e  $(x+\Delta x)$ , como  $\Delta x$  é próximo de zero, a inclinação desta reta aproxima-se da inclinação da reta tangente ao ponto  $x$  que é igual a derivada neste ponto. As equações acima são aproximações das derivadas em um ponto qualquer da função. Estas equações utilizam um  $\Delta x$  arbitrário, diferente do  $\Delta x$  da definição de derivada, o qual tende a zero. Essas equações são uma forma discreta da definição de derivadas.

## 3.2 O algoritmo de Yee

Yee introduziu um conjunto de equações diferenciais finitas para resolver as equações de Maxwell relacionadas a Lei de Faraday e Lei de Ampère, ou seja, discretizou as equações que

descrevem uma onda eletromagnética em um sistema de coordenadas tridimensionais (x, y e z). Podemos representar qualquer função dependente do espaço e do tempo escrita como:

$$F|_{i,j,k}^n = F(i\Delta, j\Delta, k\Delta, n\Delta t) \quad (3.5)$$

Onde  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$ , é o incremento espacial e  $\Delta t$  é o incremento temporal, onde  $i, j, k$  e  $n$  são números inteiros ou meio-inteiro<sup>1</sup>. Usando as diferenças finitas para as derivadas espaço-temporais, com precisão de 2ª ordem, temos:

$$\frac{\partial F|_{i,j,k}^n}{\partial x} = \frac{F|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - F|_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta} + O(\Delta^2) \quad (3.6)$$

Onde  $O(\Delta^2)$  é o erro de segunda ordem introduzido pela discretização. Utilizando a equação 3.6, para discretizar as equações de Maxwell em uma dimensão, obtemos:

$$\frac{\partial E_y|_{i+\frac{1}{2}}^n}{\partial x} = \frac{E_y|_{i+1}^n - E_y|_i^n}{\Delta} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial H_z|_{i+\frac{1}{2}}^n}{\partial t} = \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial H_z|_i^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - H_z|_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial E_y|_i^{n-\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{E_y|_i^n - E_y|_i^{n-1}}{\Delta t} \quad (3.10)$$

Substituindo 3.7 e 3.8 em 2.49, temos:

$$\frac{H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{E_y|_{i+1}^n - E_y|_i^n}{\Delta} \right) \quad (3.11)$$

E substituindo 3.9 e 3.10 em 2.50:

$$\frac{E_y|_i^n - E_y|_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{-\sigma E_y}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - H_z|_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta} \right) \quad (3.12)$$

<sup>1</sup>Seja  $Z$  o conjunto dos inteiros, definimos o conjunto dos meio-inteiros como  $Z + 1/2 = \{(n + 1/2, n + 3/2, \dots), n \in Z\}$

Os valores de  $E_y|_i^n$  e  $H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  são os valores a serem encontrados nas equações 3.11 e 3.12. Isolando-os, temos:

$$H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta} (E_y|_{i+1}^n - E_y|_i^n) \quad (3.13)$$

$$E_y|_i^n = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \Delta t} E_y|_i^{n-1} + \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - \Delta t)\Delta} \left( H_z|_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - H_z|_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.14)$$

Nas equações 3.13 e 3.14, observamos que os incrementos temporais e espaciais crescem na ordem de  $\frac{1}{2}$  na direção  $x$  e de  $\frac{1}{2}$  no tempo.

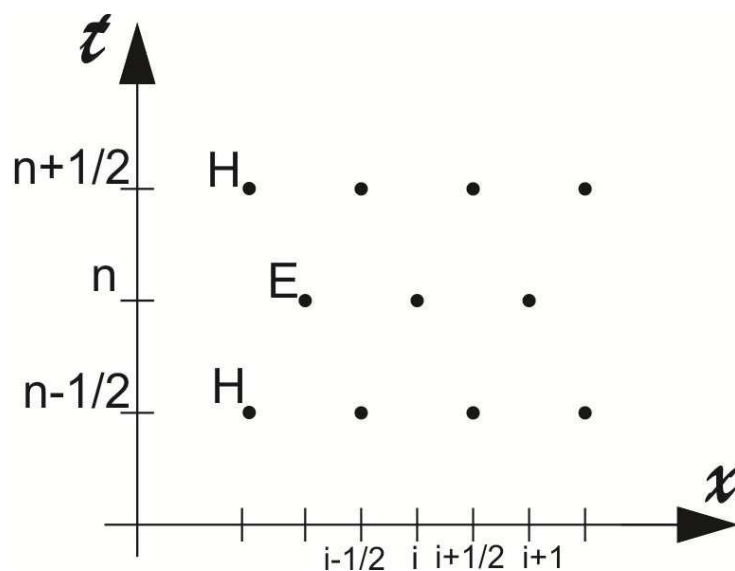


Figura 3.2: Campo elétrico e campo magnético representados no tempo e no espaço

Observamos na figura 3.2, que os valores dos campo são calculados no mesmo intervalo de tempo dividido em dois intervalos iguais. No instante  $n$  é calculado o campo elétrico e no instante  $n + \frac{1}{2}$  é calculado o campo magnético, onde um depende do outro.

Mostramos acima a representação das equações de Maxwell em uma dimensão, com dependência espacial apenas em  $x$ . No entanto, quando simulamos no espaço livre a onda propaga nas três direções,  $x, y$  e  $z$ . Na figura 3.3 mostramos como cada componente do campo elétrico influencia no campo magnético e vice versa:



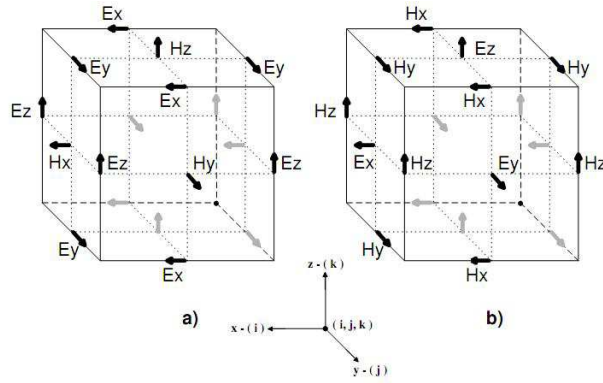


Figura 3.3: Célula estruturada de Yee(LIMA, 2006)

Esta figura representa a células estruturadas de Yee, onde os componentes  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  estão discretizados alternadamente no espaço e no tempo. Essas representações ajudam a entender os passos para a discretização das equações de Maxwell, resultando num sistema de equações de diferenças finitas, nas três direções  $x, y$  e  $z$ , dos campos elétricos e magnéticos, dadas por:

$$H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + C \cdot \left[ E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k+1}^n - E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n - E_z|_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}^n \right] \quad (3.15)$$

$$H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_y|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + C \cdot \left[ E_z|_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^n - E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - E_x|_{i+\frac{1}{2},j+1,k+1}^n \right] \quad (3.16)$$

$$H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} = H_z|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}} + C \cdot \left[ E_x|_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n - E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - E_y|_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^n \right] \quad (3.17)$$

$$E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = A \cdot E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + B \cdot \left[ H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - H_y|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} + H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.18)$$

$$E_y|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = A \cdot E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + B \cdot \left[ H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.19)$$

$$E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = A \cdot E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + B \cdot \left[ H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_y|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_x|_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_x|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.20)$$

Onde A, B e C são variáveis auxiliares, que representam os valores de  $\mu, \epsilon$  e  $\sigma$  do nó a ser calculado. E podem ser obtidos das seguintes equações:

$$A = \left[ \frac{2\epsilon - \sigma\Delta t}{2\epsilon + \sigma\Delta t} \right] \quad (3.21)$$

$$B = \left[ \frac{2\Delta t}{(2\epsilon + \sigma\Delta t)\Delta} \right] \quad (3.22)$$

$$C = \frac{\Delta t}{(\mu\Delta)} \quad (3.23)$$

Segundo Yee cada nó corresponde a um vetor de campo, possuindo propriedades elétricas  $\rho$  e  $\varepsilon$  para  $\mathbf{E}$  e  $\mu$  para o  $\mathbf{H}$ . Portanto, ao gerar a malha essas propriedades são atribuídas para as células e a cada nó e os cálculos em meios distintos saem naturalmente. Para o cálculo dos campos em cada intervalo de tempo, primeiro se calcula a malha do campo elétrico depois a do campo magnético, onde o valor atual dos campos dependem dos valores obtidos dos cálculos anteriores.

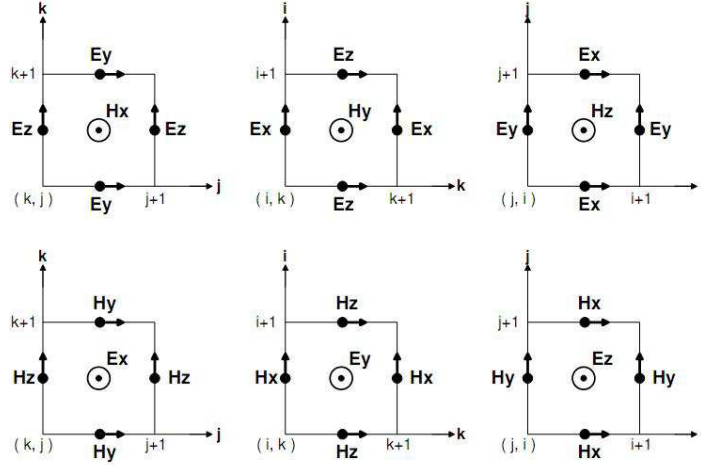


Figura 3.4: Face da célula de Yee para cálculo computacional(LIMA, 2006)

A figura 3.4 representa os campos na face das células com índices na forma matricial. Para calcular o componente que está no centro das células são utilizados a soma dos componentes em sua volta na seguinte ordem: o superior menos o inferior mais o componente da lateral esquerda mais o da direita. Por exemplo, para calcular o componente  $H_x$  no ponto cartesiano  $(i, j, k)$ , seguimos a seguinte equação:

$$H_x|_{i,j,k}^n = H_x^{n-1}|_{i,j,k} - C \left[ E_y|_{i,j,k+1}^{n-\frac{1}{2}} - E_y|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} + E_z|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j+1,k}^{n-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.24)$$

### 3.2.1 Algoritmo de Yee para duas dimensões

Como já discutimos anteriormente, as equações de Maxwell em duas dimensões são separadas em modo transversal elétrico e modo transversal magnético. Neste trabalho optamos por utilizar o modo transversal magnético, onde temos as componentes de campo magnético em  $x$  e  $y$ . Nas figuras 3.5 e 3.6 são apresentadas as formas da célula de Yee nesses modos:

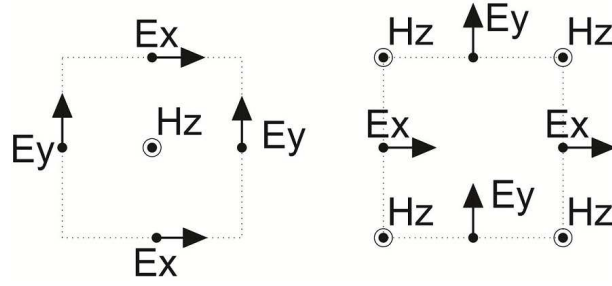


Figura 3.5: Face da célula de Yee do modo transversal elétrico

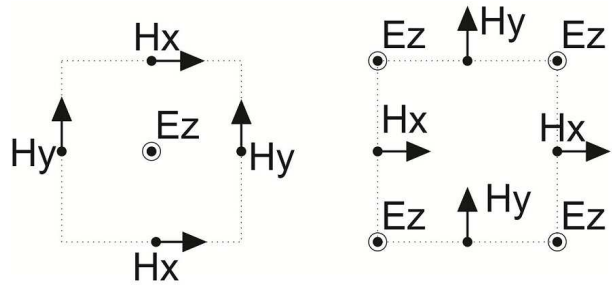


Figura 3.6: Face da célula de Yee do modo transversal magnético

Baseado nas equações de Maxwell em duas dimensões vistas anteriormente e observando as figuras 3.5 e 3.6, temos o algoritmo de Yee para os dois modos de propagação:

Modo TM:

$$H_x|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_x|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + C \left[ E_z|_{i,j-\frac{1}{2}}^n - E_z|_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right] \quad (3.25)$$

$$H_y|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = H_y|_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} + C \left[ E_z|_{i+\frac{1}{2},j}^n - E_z|_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] \quad (3.26)$$

$$E_z|_{i,j}^{n+1} = A \cdot E_z|_{i,j}^n + B \left[ H_y|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - H_y|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + H_x|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_x|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.27)$$

Modo TE:

$$E_x|_{i,j}^{n+1} = A \cdot E_x|_{i,j}^n + B \left[ H_z|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.28)$$

$$E_y|_{i,j}^{n+1} = A \cdot E_y|_{i,j}^n + B \left[ H_z|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - H_z|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.29)$$

$$H_z|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = H_z|_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} + C \left[ E_x|_{i,j+\frac{1}{2}}^n - E_x|_{i,j-\frac{1}{2}}^n + E_y|_{i-\frac{1}{2},j}^n - E_y|_{i+\frac{1}{2},j}^n \right] \quad (3.30)$$

No modo TM temos os campos magnéticos nas direções  $x$  e  $y$  envolvendo a componente do campo elétrico. A figura 3.7 mostra que eles também envolvem toda a malha. A componente

de campo magnético  $y$  fecha a malha na direção vertical, já a componente  $x$  fecha na direção horizontal.

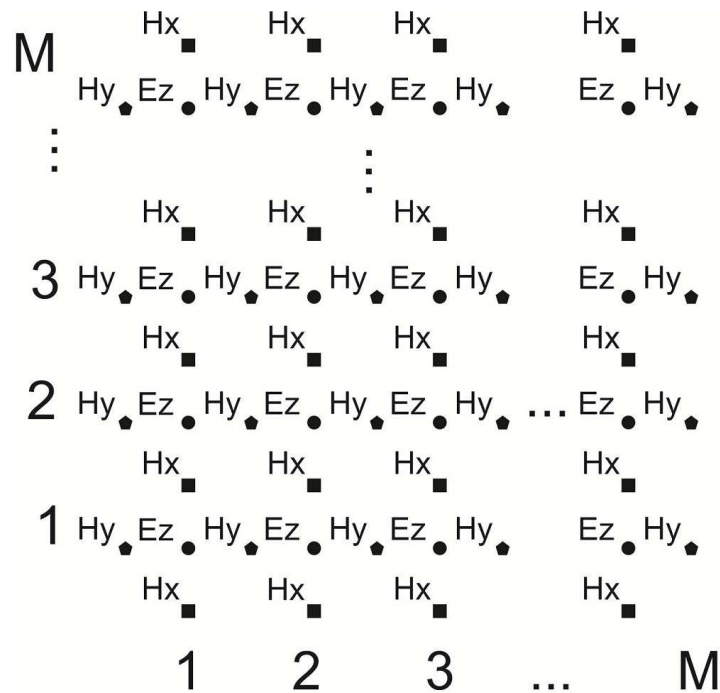


Figura 3.7: Malha do FDTD no modo transversal magnético

Essas fronteiras na malha necessitam de cálculos específicos, pois queremos simular uma propagação da onda em uma área livre. Sem as condições de contornos nas fronteiras surgirá reflexões indesejáveis, essas condições vão ser abordadas no próximo capítulo.

### 3.3 Condições absorventes nas fronteiras

A onda eletromagnética, ao se deparar com algum objeto, terá uma parte refletida e outra refratada, e continua sua propagação em uma área aberta. É este fenômeno que será reproduzido pelo *software*. No ambiente computacional não podemos ter uma matriz infinita para simular uma área livre, temos uma grade com tamanho limitado. Nas bordas desta grade se não houver um tratamento, teremos a simulação de uma área limitada por um condutor elétrico perfeito, o que ocasionaria uma reflexão total da onda ao se deparar com as bordas. Existem vários métodos para as ABC's. Esta seção abordará as condições absorventes de Mur.

As condições absorventes de Mur (MUR, 1981) foram abordadas entre 1970 a 1980, por Engquist - Majda (ENGQUIST-MAJDA, 1977), alcançam um coeficiente de reflexão em torno de 1% a 5% para onda incidente. Esse método aproxima o valor dos campos nas bordas através

do valores dos campos em torno do ponto em questão. A seguir as condições de contorno de Mur em duas dimensões.

### 3.3.1 Condições de contorno de Mur em duas dimensões

A formulação das condições de contorno de Mur são obtidas por uma aproximação da equação da onda 3.31 para cada borda da fronteira.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (3.31)$$

Para a borda da esquerda, por exemplo, é feito uma aproximação da equação da onda em torno de  $x = 0$ , resultando na seguinte equação da onda:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (3.32)$$

Essas aproximações são obtidas através da serie de Taylor, que foram utilizadas para chegar na equação 3.32, Não vamos discutir essas aproximações aqui, que são demonstradas em (MUR, 1981) e discutidas no livro (TAFLOVE, 1995).

Nos pontos de coordenada (0,0) (0,M) da matriz, não é possível calcular a derivada parcial com dependências em y, por isso é usado a equação de uma forma mais simples, com aproximações de primeira ordem da serie de Taylor, resultando na seguinte equação para borda da esquerda:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (3.33)$$

As condições de contorno nas bordas onde  $x = M$ ,  $y = 0$  e  $y = M$ , são obtidas pelas seguintes equações respectivamente:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (3.36)$$

A próxima seção mostra a discretização das equações de condições nas fronteiras da matriz

computacional

### 3.3.2 Condições de contorno de Mur em diferenças finitas

Para obtermos as condições de contorno da borda da esquerda  $U|_{0,j}^n$ , vamos substituir as derivadas parciais da equação 3.32 pela derivada central no ponto da matriz  $(1/2,j)$ , obtendo os seguintes resultados:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \Big|_{1/2,j}^n = \frac{1}{2\Delta t} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{1/2,j}^{n+1} - \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{1/2,j}^{n-1} \right) = \frac{1}{2\Delta t} \left[ \left( \frac{U|_{1,j}^{n+1} - U|_{0,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \left( \frac{U|_{1,j}^{n-1} - U|_{0,j}^{n-1}}{\Delta x} \right) \right] \quad (3.37)$$

Para calcularmos os termos da equação 3.32 que dependem de  $t$  e  $y$  no ponto  $(1/2,j)$ , vamos igualar a média dos valores dos pontos adjacentes  $(0,j)$  e  $(1,j)$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{1/2,j}^n = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial t^2} \Big|_{0,j}^n - \frac{\partial U}{\partial t^2} \Big|_{1,j}^n \right) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{U|_{0,j}^{n+1} - 2U|_{0,j}^n + U|_{0,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) + \left( \frac{U|_{1,j}^{n+1} - 2U|_{1,j}^n + U|_{1,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) \right] \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{1/2,j}^n = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y^2} \Big|_{0,j}^n - \frac{\partial U}{\partial y^2} \Big|_{1,j}^n \right) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{U|_{0,j}^{n+1} - 2U|_{0,j}^n + U|_{0,j}^{n-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \left( \frac{U|_{1,j}^{n+1} - 2U|_{1,j}^n + U|_{1,j}^{n-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right] \quad (3.39)$$

Considerando  $\Delta x = \Delta y$ , podemos escrever apenas  $\Delta$  como incremento espacial. Substituindo as expressões em diferenças finitas 3.37, 3.38 e 3.39 em 3.32 e isolando o termo  $U|_{0,j}^{n+1}$ , resulta no seguinte algoritmo para o campo magnético em  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} U|_{0,j}^{n+1} = & -U|_{1,j}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left( U|_{1,j}^{n+1} + U|_{0,j}^{n-1} \right) + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \left( U|_{1,j}^n + U|_{0,j}^n \right) + \\ & + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta}{2(\Delta)^2 (c\Delta t + \Delta)} \\ & \left( U|_{0,j+1}^n - 2U|_{0,j}^n + U|_{1,j+1}^n + U|_{1,j+1}^n - 2U|_{1,j}^n + U|_{0,j+1}^n \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nas outras bordas o processo é semelhante, o termo  $U|_{M,j}^{n+1}$  representa a borda da direita,  $U|_{i,0}^{n+1}$  representa a borda inferior e  $U|_{i,M}^{n+1}$  representa a borda superior. No caso dos vértices da grade utilizamos a aproximação da equação de primeira ordem, o que exclui da equação 3.40 o

termo dependente de  $y$ , resultando no seguinte algoritmo para os vértices da esquerda:

$$U|_{0,j}^{n+1} = -U|_{1,j}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left( U|_{1,j}^{n+1} + U|_{0,j}^{n-1} \right) + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \left( U|_{1,j}^n + U|_{0,j}^n \right) \quad (3.41)$$

Utilizando este método para tratamento das bordas conseguimos estabelecer uma condição de contorno no *software*, chegando em até 5% de onda refletida nas bordas (TAFLOVE, 1995). Foi realizados alguns teste onde obtivemos um valor de 0,5% nas arestas e 4,8% nos vértices das bordas de onda refletida. Estes valores são considerados aceitáveis para nosso *software* que as pequenas reflexões não ocasionaram grandes problemas. para simulações que exijam maior precisão, existem outros métodos de ABC, como a PML (Camada perfeitamente casada) (PICANÇO, 2006), no qual a grade do FDTD possui uma borda mais espessa, onde suas características do meio são diferente nas componentes de diferentes direções (meio não isotrópico) e variam gradativamente, de tal forma que absorva a onda sem haver reflexões.

Para formulação em uma dimensão, temos competentes espaciais dependendo apenas de  $x$ , o que torna mais simples a camada absorvente, partindo da equação da onda com deslocamento para esquerda:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (3.42)$$

Analogamente ao sugerido pelo algoritmo de Yee, aproximamos via diferenças finitas as derivadas parciais em 3.42 em torno do ponto  $x = 1/2dx$  e  $t = (n - 1/2)dt$ . Para a derivada em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{\Delta x/2}^{n-1/2} = \frac{U|_1^n - U|_0^n}{\Delta} \quad (3.43)$$

Temos um problema em relação a derivada parcial em relação ao tempo no ponto  $(1/2)$ , por isso vamos igualar este valor a média dos valores dos pontos adjacentes:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{1/2}^{n-1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_0^{n-1/2} + \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_1^{n-1/2} \right) \quad (3.44)$$

Assim podemos resolver a derivada a parciais no tempo com algoritmo de Yee:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_0^{n-1/2} + \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_1^{n-1/2} \right) = \frac{1}{2\Delta t} (U_0^n - U_0^{n-1} + U_1^n - U_1^{n-1}) \quad (3.45)$$

Substituindo as expressões 3.43 e 3.45 em 3.42 obtemos o algoritmo para camada absorvente na borda da esquerda em uma dimensão, chegando no seguinte resultado:

$$U|_0^n = U|_1^{n-1} - \frac{\Delta - c\Delta t}{\Delta + c\Delta t} (U|_1^n - U|_0^{n-1}) \quad (3.46)$$

Podemos notar na simulação, que a camada absorvente de Mur em uma dimensão reduz a onda refletida em aproximadamente 100%, pois em uma dimensão não vamos ter a incidência de onda oblíquas nas bordas, por ter apenas uma dimensão. Já em duas dimensões o *software* apresentou uma boa absorção, não conseguindo notar visualmente na simulação, apenas fazendo uma análise dos valores de campo nas borda, o que podemos verificar na 3.9:

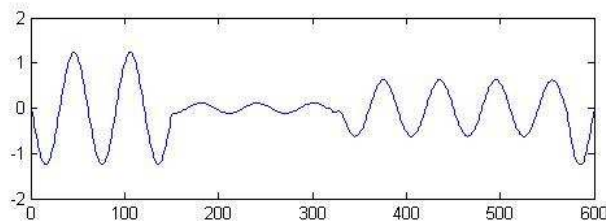


Figura 3.8: Propagação da onda em uma dimensão com grade sem uso de ABC's

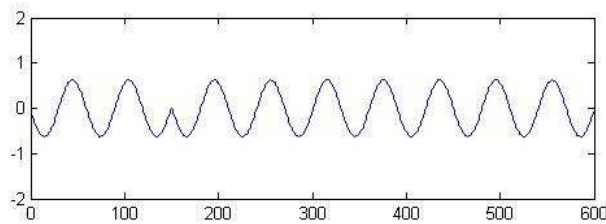


Figura 3.9: Propagação da onda em dimensão com grade com uso de ABC's



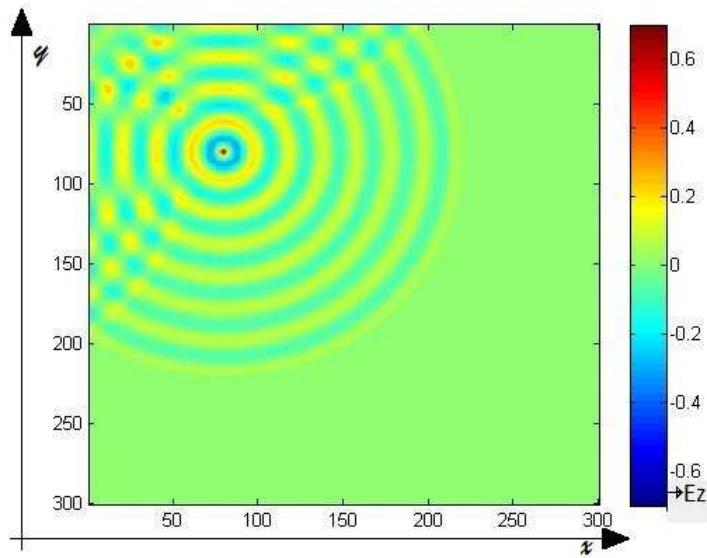


Figura 3.10: Propagação da onda em duas dimensão com grade sem uso de ABC's

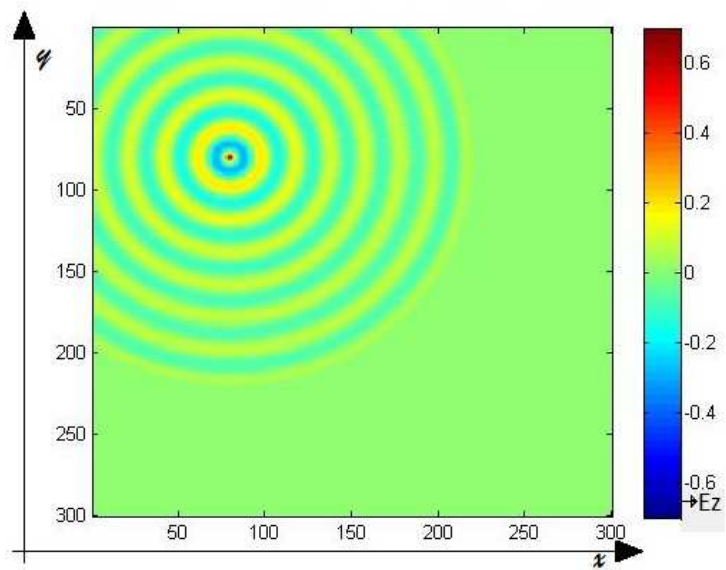


Figura 3.11: Propagação da onda em duas dimensão com grade com uso de ABC's

## 3.4 Precisão e estabilidade

Para obter níveis de precisão satisfatórios nos cálculos FDTD, evitando erro de magnitude e fase nos campos analisados, o incremento espacial usado deve ser menor que 10% do comprimento de onda a ser analisado (LIMA, 2006). Se forem utilizados diferentes valores de incremento espacial, o maior deve ser limitado desta forma. É comum a utilização da razão de 20, obtendo assim uma maior precisão nos cálculos. Estes valores de densidade de malha foram determinados com base em cálculos da velocidade de fase de malha FDTD. A figura 3.12 apre-

sentada a variação da velocidade de fase de uma onda propagando no vácuo, para os diferentes ângulos de propagação e para diferentes densidades de malha:

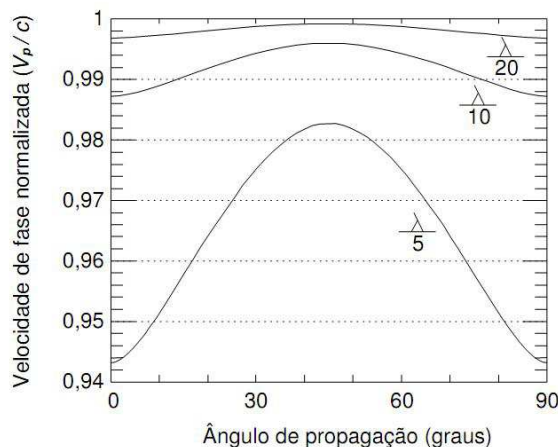


Figura 3.12: Ângulo de propagação (LIMA, 2006)

Observamos na figura 3.12 a diferença na velocidade de fase da onda no *software* em relação ao ângulo de propagação. Percebe-se também que quanto maior a densidade de malha menor é a variação da velocidade. Os erros de precisão são conhecidos como dispersão numérica, que acarretam diferenças na velocidade e na fase da onda eletromagnética. Quanto a estabilidade numérica, ela é limitada pelo valor do incremento temporal  $\Delta t$ , o qual deve satisfazer a seguinte relação:

$$\Delta t \leq \frac{1}{v_{max} \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (3.47)$$

Onde  $V_{max}$  é a máxima velocidade de fase esperada no modelo. Usando uma célula cúbica, de tal forma que  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$  obtém-se a seguinte equação:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{v_{max} \sqrt{N}} \quad (3.48)$$

$N$  é um número correspondente à dimensão espacial (exemplo: 3 dimensões,  $N = 3$ ). Quanto maior o incremento espacial, menor será o tempo de simulação para obtenção de uma resposta. Em contrapartida quanto menor o incremento, melhor será a precisão da resolução em frequência na análise espectral dos sinais obtidos. A frequência de amostragem dos modelos é igual ao inverso do incremento temporal, ou seja,  $fs = 1/\Delta t$  e a máxima frequência a ser analisada pelo modelo é dada por  $f_{max} = fs/2$ . Essas informações são úteis na determinação do espectro de frequência dos sinais obtidos no FDTD.

## 3.5 Excitação

Para simular a propagação de uma onda na malha é imposta uma excitação em um ponto ou em um conjunto de pontos, seja sobre a malha de campo elétrico ou campo magnético. As excitações mais utilizadas são impulso, pulso gaussiano e a senoide.

Uma característica do pulso gaussiano é que seu espectro de frequência também apresenta comportamento gaussiano e quanto menor for a largura do pulso gaussiano mais abrangente será seu espectro de frequência.

Quando se deseja analisar o comportamento de apenas uma frequência, utiliza-se função seno, suavizando o seu início. A variação brusca na amplitude da excitação pode acarretar no surgimento indesejado de componentes de alta frequência.

### Fontes *Hard* e *Soft*

Um outro ponto importante é o tipo de excitação. Entre eles podemos citar os dois tipos mais comuns são chamados *hard* e *soft*. O *hard* injeta o sinal na malha FDTD de um modo direto, ou seja, uma função  $F(t)$ , impõe seu valor em um componente do campo. Já o tipo *soft* leva em consideração os valores do campo gerado de forma iterativa.

A principal diferença entre os dois tipos é que o *hard* pode criar um condutor elétrico perfeito no local onde a fonte é inserida, ocasionando reflexões indesejadas em consequência da imposição forçada do campo, já as fontes *soft* inserem pulsos de forma natural não ocasionando nenhum tipo de reflexão. Como o pulso terá na maioria das vezes uma pequena duração, as equações do campo naquele ponto resultarão na forma padrão das equações iterativas do método FDTD.

Todas essas informações são necessárias e dão uma bom suporte para o desenvolvimento do projeto elaborado no ambiente Matlab. O capítulo seguinte apresenta o desenvolvimento do *software* utilizando o método FDTD, detalhando e demonstrando os resultados.

## 4 *Implementação do método*

Este capítulo apresenta os detalhes necessários para elaborar o SOEM, primeiro descrevemos as grades de campos elétricos e magnéticos, as variáveis necessárias para inicialização, tipos de fontes, e as bordas absorventes com o método FDTD. Por último apresenta o projeto finalizado programado em Matlab, chamado de Software de Onda Eletromagnética-SOEM, e seus cinco módulos: simulador em uma e duas dimensões, um simulador de radar de penetração terrestre (GPR), um módulo de onda espalhada e outro módulo exemplificando a perda de potência de um sinal ao atravessar uma parede.

### 4.1 **Grades de campos elétricos e magnéticos**

Primeiramente no *software*, foi implementado as grades de campo elétrico e magnético, sendo uma grade para cada direção de campo. Neste trabalho foi escolhido modo transverso magnético, temos três grades de campo:  $E_z$ ,  $H_x$  e  $H_y$ , que foram vistas na figura 3.7 do capítulo anterior.

Essas grades de campo são um conjunto de vetores cujo posição dos vetores, correspondem as posições nos eixos cartesianos. As matrizes podem ser quadradas ou retangulares, dependendo da área que deseja-se analisar. Todas as matrizes no *software* tem que respeitar os mesmos número de colunas e linhas, pois temos uma ligação entre elas na realização dos cálculos.

Nas grades de campos magnéticos são adicionados um vetor correspondente as bordas. Esse aumento, faz com que tenhamos nas bordas apenas vetores de campos magnéticos, na grade horizontal  $H_x$  na vertical em  $H_y$ . Isso ajuda para que tenhamos a implementação das ABC's apenas nos campos magnéticos.

## 4.2 Inicialização

Alguns valores são carregados na inicialização do *software*, a figura 4.1 mostra alguns deles:

```

5      %valores de entrada
6 -    frequencia = 1e9           %Hz
7 -    epsilon0 = 8.854*10^(-12); % permissividade elétrica do vácuo
8 -    mu0 = 4*pi*10^(-7);      % permeabilidade magnética do vácuo
9 -    c0=1/(sqrt(mu0*epsilon0)) % velocidade da luz no vácuo
10 -   d = 15e-3;                % incremento espacial
11 -   dt=0.8*d/(c0*(2^(1/2)));  % incremento temporal
12
13 -   const1=(c0*dt-d)/(d+c0*dt); %Constante para calcular camada absorvente
14 -   const2=((c0*dt)^2)/(2*d*(d+c0*dt)); %Constante para calcular camada absorvente
15 -   const3=(2*d)/(d+c0*dt);    %Constante para calcular camada absorvente
16 -   omega = frequencia*2*pi;   %w
17 -   M = 300;                  %tamanho do vetor espacial
18

```

Figura 4.1: Valores de entrada

O primeiro item é a frequência da onda a ser analisada, depois é imposto as características do meio, neste caso foi utilizado apenas um meio para simulação (foi utilizado o meio de propagação o “Ar” com os mesmos valores do vácuo, que são relativamente próximos). Depois, respeitando os critérios de estabilidade, calculado-se os valores dos incrementos temporal a partir do espacial imposto. Com esses valores é calculado as variáveis auxiliares comentadas no capítulo anterior, pelas equações (3.21, 3.22 e 3.23). Por fim é definido o tamanho da grade, neste exemplo é uma matriz quadrada de (300,300).

Esses são os valores iniciais padrões para elaboração do *software* e a partir disto ele será escrito de acordo com o que se quer simular. A motivação deste trabalho não foi uma situação específica, mais sim criar uma ferramenta de estudo de ondas eletromagnéticas. Foi criado três módulos para exemplificar as áreas de estudos do eletromagnetismo e outros dois para propagação da onda em uma e duas dimensões. A próxima seção apresenta o *Software de Ondas Eletromagnéticas* (SOEM) e seus módulos.

## 4.3 Software de Ondas Eletromagnéticas - SOEM

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de um *software* para simular a propagação de um OEM, este foi chamado de SOEM, tendo cinco módulos. Na figura 4.2, podemos ver a tela inicial:

Figura 4.2: Tela inicial do *software*

Ao abrir o “SOEM” podemos escolher entre os seus cinco módulos. Dois deles podemos simular a propagação da onda em duas e uma dimensão, estes possibilitam variar o tamanho da área a ser simulada, modificar a área em até três meios distintos de propagação ou colocar um PEC para verificar problemas de reflexão. O modulo “Simulação Parede” propaga a onda em uma dimensão, com frequência de 1GHz atravessando uma parede, verifica-se as perdas de amplitude na onda ao penetrar meios diferentes. Outro modulo é o “Simulador GPR<sup>1</sup>”, radar de penetração na terra mas conhecido como detector de metais, podemos verificar tempo de resposta da onda e a amplitude do sinal refletido. Por ultimo um simulador que mostra graficamente em duas dimensões o sinal refletido ao se deparar com um PEC, este modulo retira a onda incidente da onda total, mostrando apenas a onda refletida no objeto. Que será melhor explicado no seção 4.3.5

### 4.3.1 Simulador em duas dimensões

Este é o modulo mais completo do SOEM, a figura 4.3 mostra todas as opção desta janela:

---

<sup>1</sup>do inglês *Ground Penetration Radar*

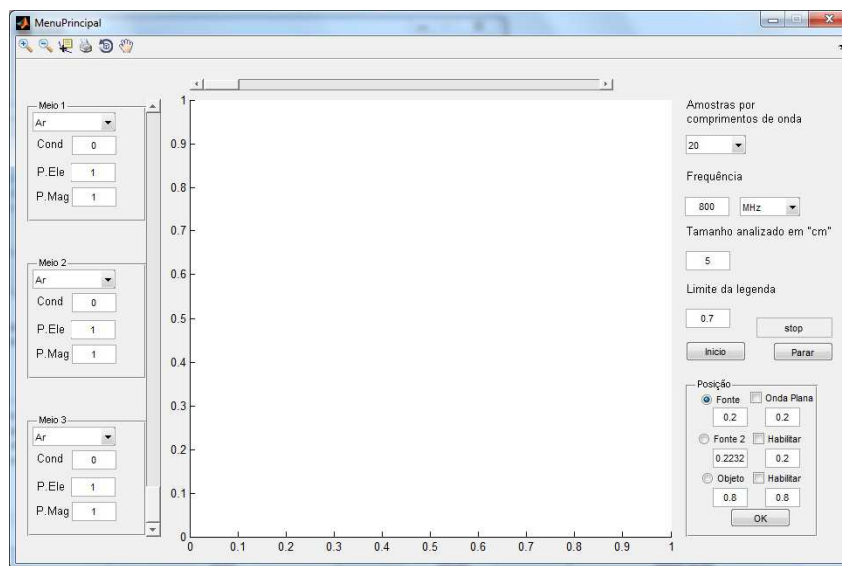


Figura 4.3: Módulo de simulador da onda em duas dimensões

Na esquerda da figura 4.3 podemos ver os *Pop-up menu*, que modificam as propriedades do meio a ser analisada. Na direita, opções para alterar quantidade de amostras por comprimento de onda, modificar a frequência do sinal e a amplitude da legenda. Ao alterar o número de amostras por comprimento de onda faz que altere o incremento espacial  $\Delta$ . O último item modifica a posição da primeira fonte, habilita e modifica a posição de uma segunda fonte e/ou um objeto.

### 4.3.2 Simulador em uma dimensão

Esta janela simula o fenômeno da propagação da onda eletromagnética em uma dimensão, na parte superior da figura 4.4 visualizamos os menus para alterar as propriedades do meio. Na parte inferior encontra-se as opções para alterar a quantidade de amostras por comprimento de onda, o tamanho da área a ser analisada em centímetros, modificar a frequência do sinal e a amplitude da legenda, tipo de fonte (continua ou pulso), alterar a posição da fonte e habilitar ou desabilitar as camadas absorventes.

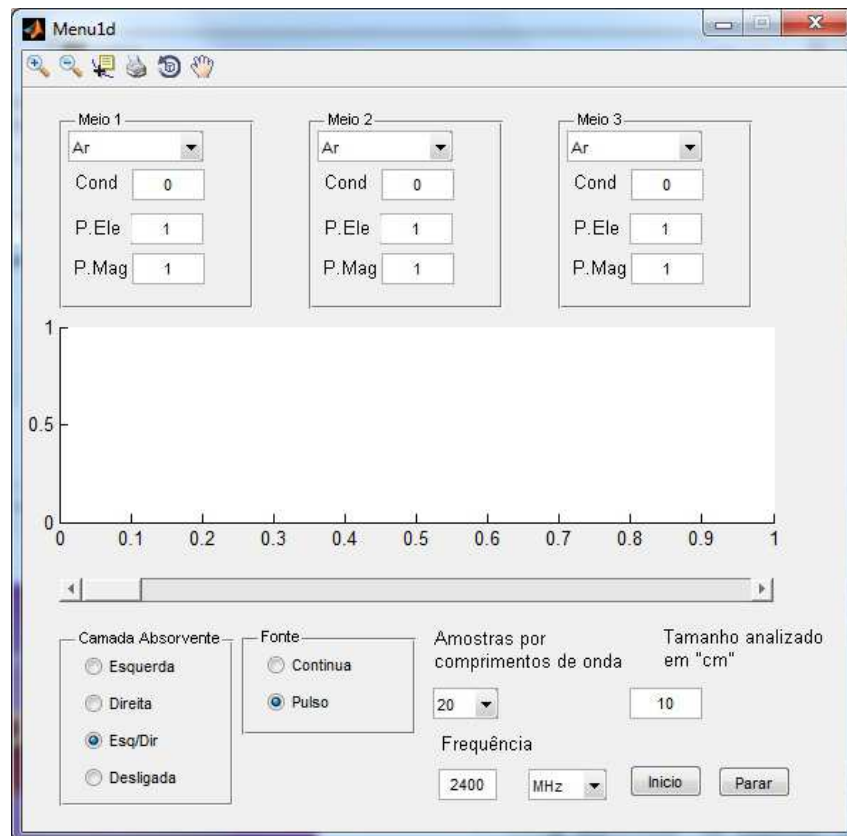


Figura 4.4: Módulo de simulador da onda em duas dimensões

### 4.3.3 Simulador de radar de penetração terrestre

O GPR é utilizado para detecção de objetos sob o solo, ou para obter um mapeamento do interior do terreno, como detecção de rochas ou água. Os primeiros relatos de fabricação é da Alemanha, onde foram encontradas patentes da década de 1920. Durante a Segunda Guerra Mundial a Grã-Bretanha desenvolveu-se um sistema que usa pequenos pulsos para detectar aviões inimigos, outros países como EUA e França já tinham essa tecnologia antes da Segunda Guerra (BASSON, 2000).



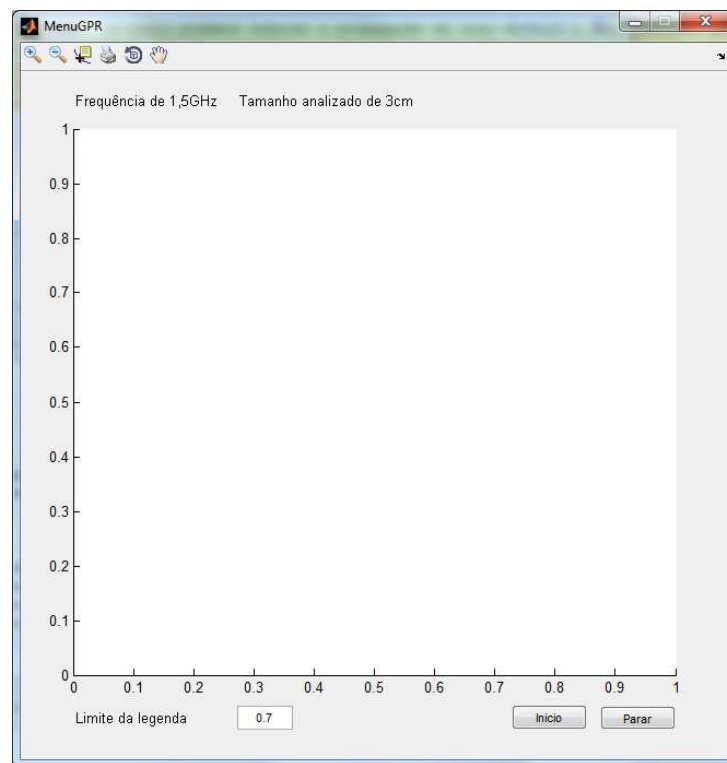


Figura 4.5: Módulo simulador de GPR

Neste módulo temos uma simulação simples do GPR, poderia ser melhor explorado se esse fosse o foco do trabalho.

#### 4.3.4 Simulador da onda atravessando uma parede

Este módulo verifica a perda que uma OEM sofre ao atravessar uma parede. Um exemplo prático seria um roteador *wireless* numa residência, o quanto da onda é perdido em reflexões.

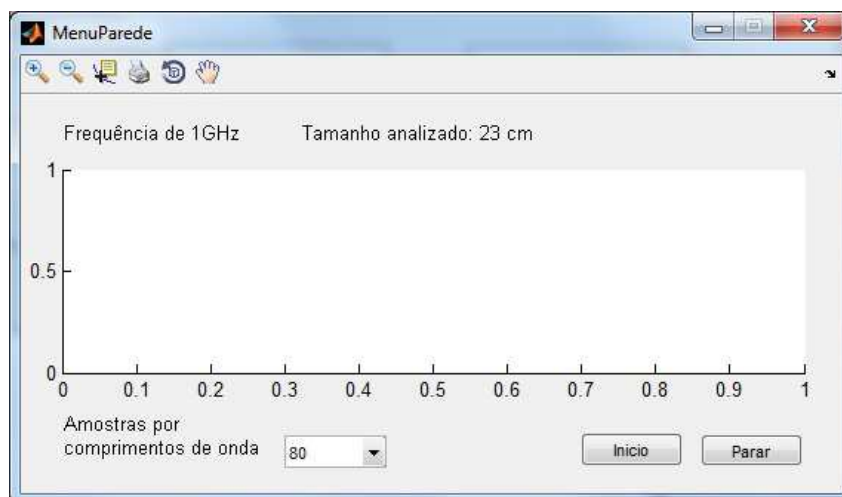


Figura 4.6: Módulo simulador da onda atravessando uma parede

Neste módulo foi observado o problema quanto a quantidade de amostras por comprimento de onda. No capítulo 4.2, na seção de Precisão e estabilidade, foi falado que idealmente teríamos 20 amostras por comprimento de onda. Esta quantidade de pontos não foi suficiente para uma boa simulação. Pelo tamanho da área a ser simulada, a onda teve uma distorção na metade da simulação. Aumentando a quantidade de pontos, temos um incremento espacial menor, isso aumenta a precisão do método.

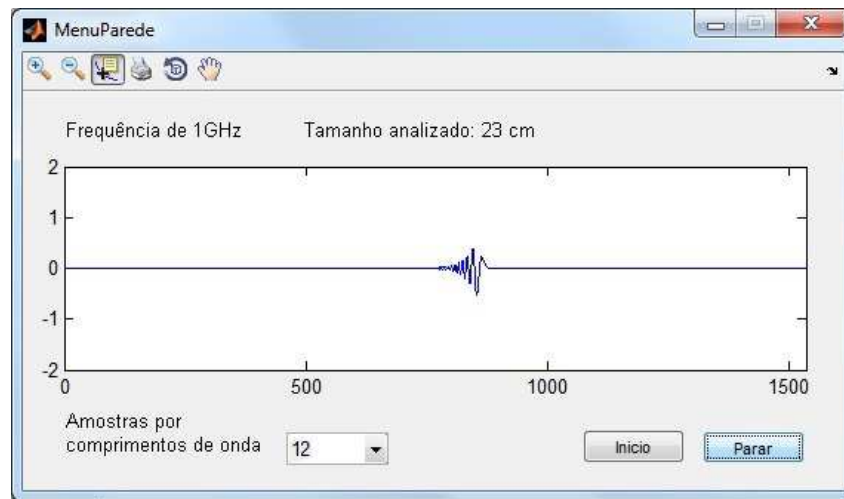


Figura 4.7: Simulação com 13 pontos por comprimento de onda

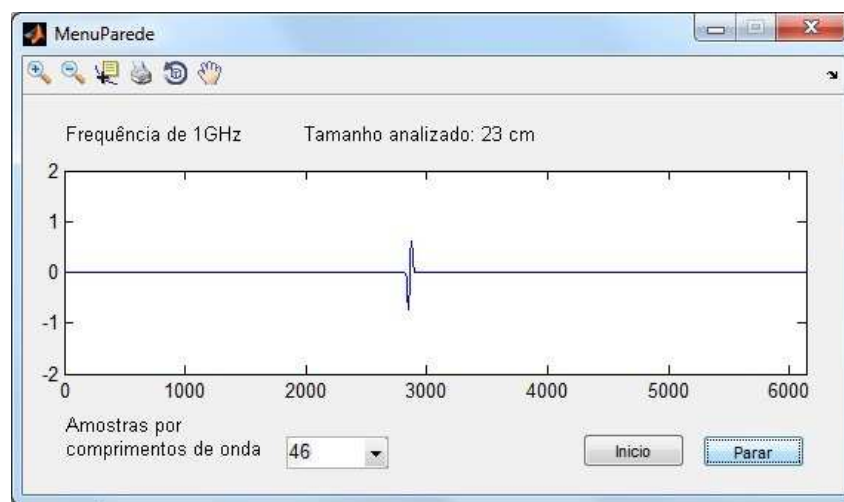


Figura 4.8: Simulação com 46 pontos por comprimento de onda

Na figura 4.7, tivemos 5.500 intervalos de tempo para a onda percorrer a mesma distância da figura 4.8, que gastou apenas 1.500 intervalos de tempo. Com a diminuição do incremento espacial, diminuí o incremento temporal. O problema é perceptível no gráfico, na figura 4.8 a onda propaga sem distorções, já na figura 4.7 claramente nota-se uma distorção no sinal transmitido.

### 4.3.5 Simulador de onda refletida

Este modulo possibilita visualizar o formato da onda refletida por um objeto. O quadrado central que esta demarcado na figura 4.9 é o limite da grade de campo elétrico entre a onda total e a onda refletida. No interior do quadrado está a onda total (incidente mais a onda refletida), no exterior do quadrado é retirado a onda incidente, restando apenas a refletida.

Este processo é possível simulando duas grades de cada campo, um conjunto de grades com os valores da onda incidente e o outro com a onda total, subtraindo um pelo outro vai restar apenas a onda refletida.

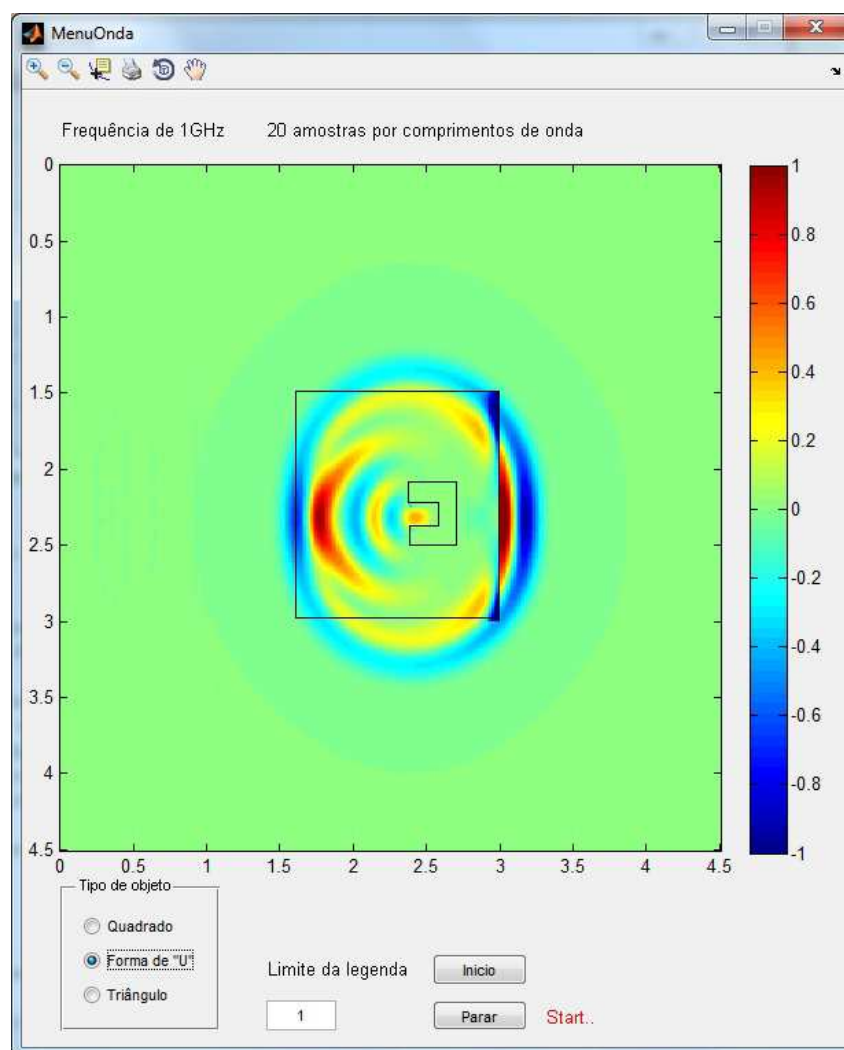


Figura 4.9: Módulo de simulador da onda atravessando uma parede

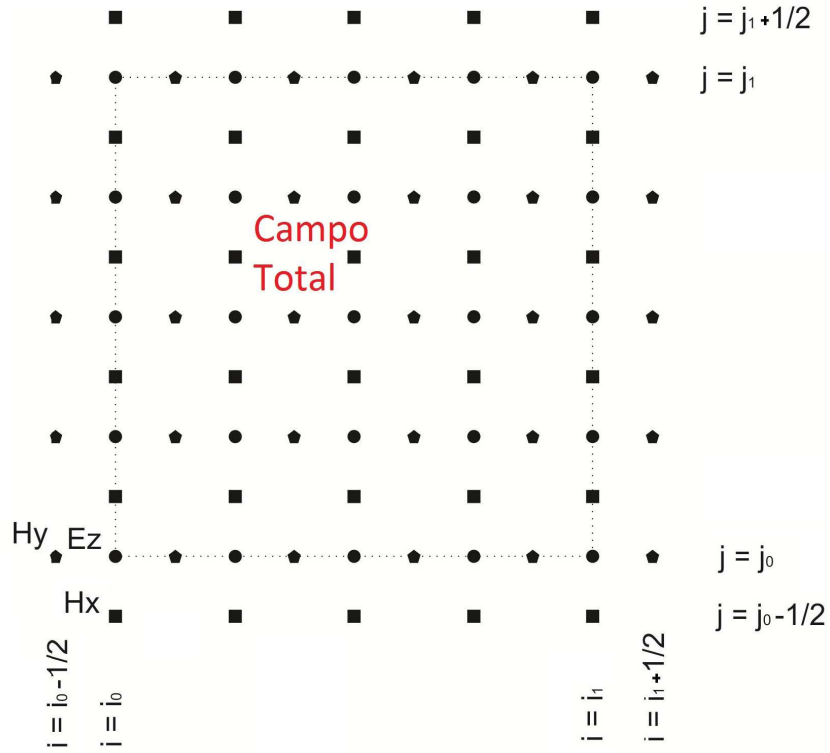


Figura 4.10: Limites das grades de campo

A figura 4.10 mostra em pontilhado o limite do campo elétrico. No exterior deste quadrado os valores de campo magnético na direção  $x$  e  $y$ , necessários para esta subtração. Esses valores são utilizados para o cálculo de campo espalhado, obtido pelos algoritmos seguinte:

Limite da borda inferior:

$$H_x|_{i,j_0-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_x|_{i,j_0-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B.E_{z,inc}|_{i,j_0}^n \quad (4.1)$$

$$E_z|_{i,j_0}^{n+1} = E_z|_{i,j_0}^{n+1} + C.H_{x,inc}|_{i,j_0-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

Limite da borda superior:

$$H_x|_{i,j_1-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_x|_{i,j_1-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B.E_{z,inc}|_{i,j_1}^n \quad (4.3)$$

$$E_z|_{i,j_1}^{n+1} = E_z|_{i,j_1}^{n+1} - C.H_{x,inc}|_{i,j_1+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Limite da borda da esquerda:

$$H_y|_{i_0-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = H_y|_{i_0-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - B.E_{z,inc}|_{i_0,j}^n \quad (4.5)$$

$$E_z|_{i_0,j}^{n+1} = E_z|_{i_0,j}^{n+1} - C.H_{y,inc}|_{i_0-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

Limite da borda da direita:

$$H_y|_{i_1-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = H_y|_{i_1-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - B.E_{z,inc}|_{i_1,j}^n \quad (4.7)$$

$$E_z|_{i_1,j}^{n+1} = E_z|_{i_1,j}^{n+1} + C.H_{y,inc}|_{i_1+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

Os valores de  $B$  e  $C$  desses algoritmos são os mesmos das fórmulas 3.22 e 3.23 do capítulo 3. Todos os valores de campo que estão ao lado esquerdo das igualdades, são das grades principais que estão sendo impressas no gráfico. Os campos indicados com “inc” - incidente, são relacionados as grades não impressas, mas estão rodando junto no *software*, contendo apenas a onda incidente.

## 4.4 Fontes

Os tipos de fontes ocupou uma parcela dos estudos muito importante. A fonte necessita de alguns detalhes para um bom funcionamento do SOEM. Alguns tipos de fontes como uma função seno ou exponencial, tem seus valores alterados abruptamente quando ligamos. Inicialmente no *software* a fonte estará desligada, em um certo momento  $t_0$  ela é iniciado, mudando o valor do campo naquele ponto. Este valor tem que crescer suavemente do zero até seu valor máximo, para evitar ruídos indesejados pela propagação desta fonte no método numérico. Analiticamente não teríamos esse tipo de problema.

Após estudos em várias referências encontramos dois tipos de fontes que nos atenderiam. Uma é o seno com seus valores iniciais e finais suavizados e a outra é um pulso gaussiano que gera inicialmente um pulso positivo e depois um negativo. Abaixo mostramos a formulação das duas fontes:

$$U(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t \cdot \Delta t) - \frac{A}{2} \cdot \sin(2\omega \cdot t \cdot \Delta t) \quad (4.9)$$

Essa equação nos resulta no seguinte gráfico:

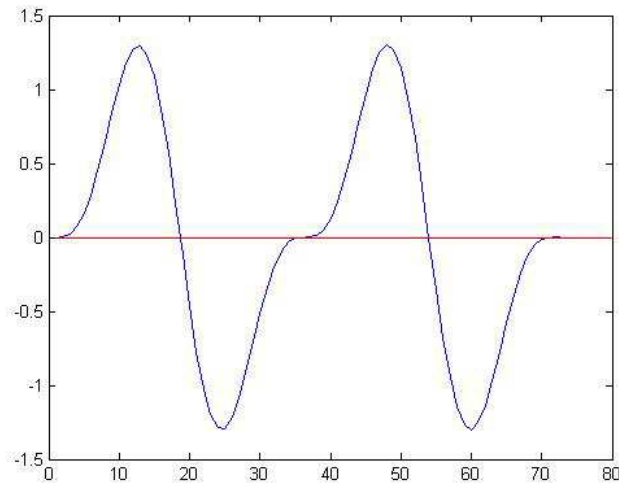


Figura 4.11: Gráfico da função da equação 4.9

$$U(t) = -A \cdot \frac{t - t_0}{\text{spread}} \cdot e^{\left(\frac{t-t_0}{\text{spread}}\right)^2 - 1} \quad (4.10)$$

O valor *Spread*, do inglês espalhamento, define quantas iterações de tempo levará para o sinal variar seu valor de pico a pico, ou seja quantos intervalo de tempo tem do pulso no seu valor máximo até o mínimo. Essa equação nos resulta no seguinte gráfico:

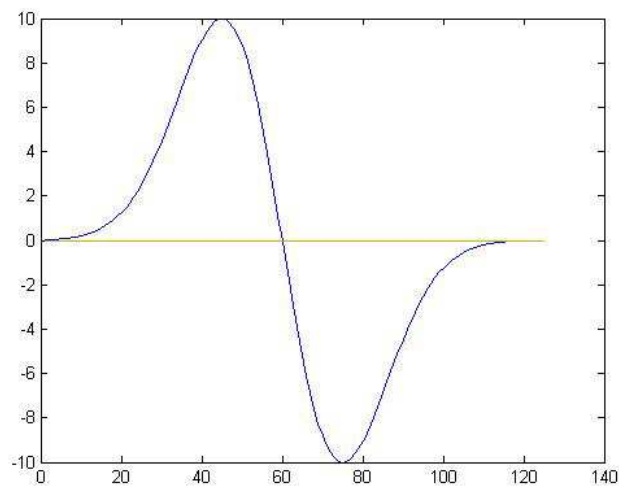


Figura 4.12: Pulso gaussiano com parte positiva e parte negativa

Para obtermos uma onda contínua optamos pela função seno, que nos permite configurar a frequência correta da onda. Já quando utilizamos apenas um pulso melhor utilizar o pulso gaussiano, pois o limite da função quando o tempo vai para infinito é igual a zero. Isso facilita

para o desligamento da fonte logo após seu pulso negativo.

## 4.5 Simulações e resultados

Este capítulo apresenta alguns teste realizado com o *software* SOEM e alguns resultados em relação a camada absorvente.

### 4.5.1 Simulação com GPR

Nesta simulação de GPR realizamos dois experimentos, com e sem objeto e analisamos o resultado captado pelo receptor localizado fora do solo:

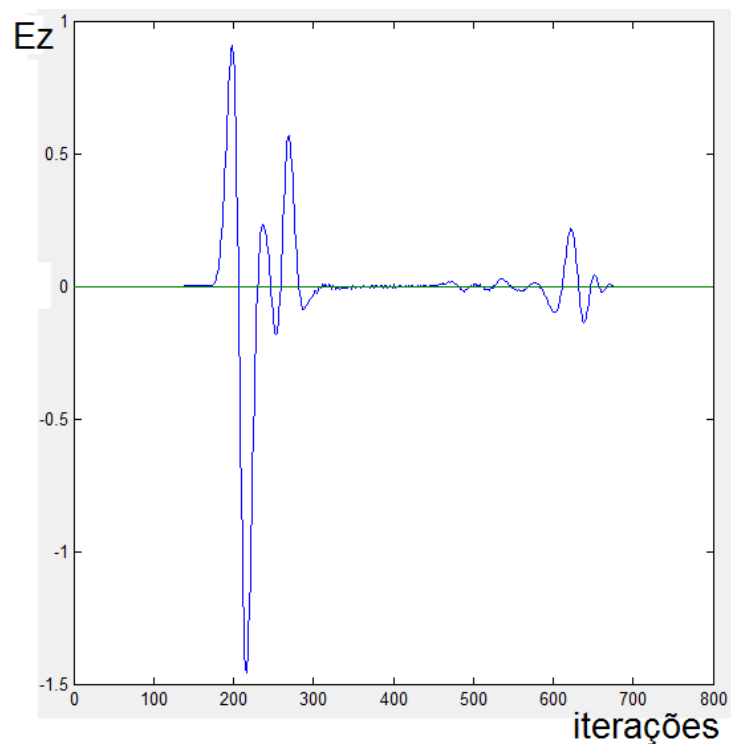


Figura 4.13: Campo elétrico captado num ponto sobre a terra na simulação do GPR com objeto

Na figura 4.13 temos a resposta quando inserido um objeto sob o solo. Nas primeiras iterações, temos a onda incidente diretamente na antena e uma parte da onda que é refletida ao penetrar no solo, logo após observamos um intervalo de tempo até captar a onda refletida no objeto. Este intervalo de tempo pode ser utilizado para calcular a profundidade que o objeto esta da superfície do solo.

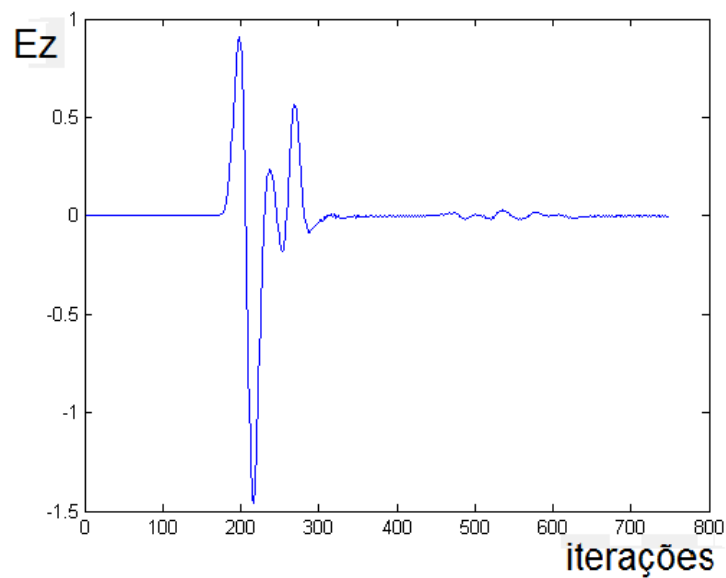


Figura 4.14: Campo elétrico captado num ponto sobre a terra na simulação do GPR sem objeto

Na figura 4.14 apresenta a resposta quando não temos nenhum objeto sob o solo. Verificamos a onda refletida no solo, depois não temos mais nenhum sinal considerável.

#### 4.5.2 Testes realizados na camada absorvente

Para conseguir um nível de onda refletida considerável para melhor visualização da simulação foram realizados vários teste nas condições de contorno. Se não houver um tratamento nas bordas haverá uma deformidade indesejada na onda eletromagnética, que podemos observar na figura 4.15. Impossibilitando adquirir um resultado preciso em diversas simulações.

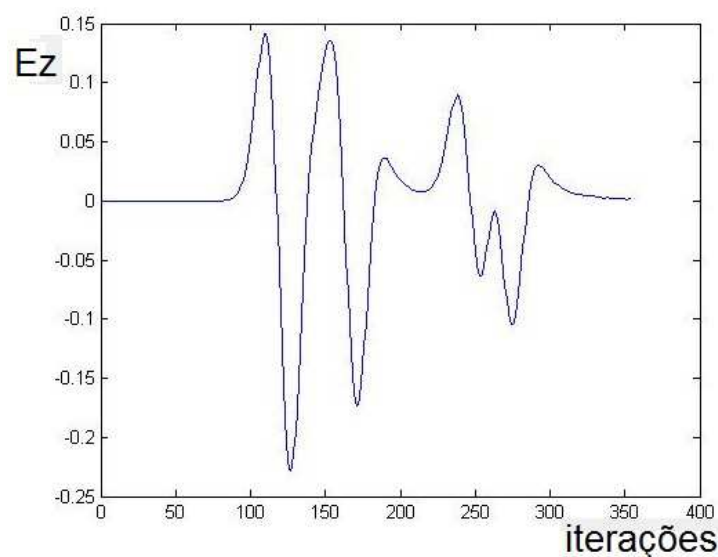


Figura 4.15: Campo elétrico captado num ponto específico da área simulada



Utilizando a ABC de Mur, a onda refletida nas laterais são menores que 5%. Na figura 4.16 podemos observar uma onda refletida com  $\approx 10\%$  da onda incidente, esta é a onda refletida nos vértices da grade, onde temos uma aproximação de primeira ordem da série de Taylor nos cálculos das condições de contorno, que foi explicado no capítulo 3.

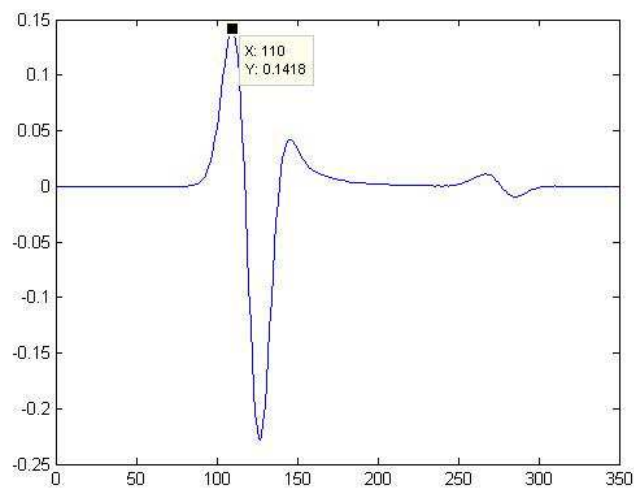


Figura 4.16: Campo elétrico captado num ponto específico da área simulada

## 5 *Conclusões*

Um *software* com simulações numéricas associadas a um determinado fenômeno físico, como o que foi desenvolvido neste trabalho, tem claramente muitas utilidades. Como a comparação com as soluções analíticas, simulação de problemas onde soluções analíticas sejam impraticáveis, e eventualmente para a solução de problemas complexos oriundos da indústria.

Neste trabalho tivemos a oportunidade de estudar mais detalhadamente o fenômeno da propagação das ondas eletromagnéticas e os principais aspectos dos métodos numéricos, baseados em diferenças finitas para equações diferenciais e principalmente para a discretização das equações de Maxwell no domínio do tempo, e toda complexidade deste método como condições de transmissão, condições absorventes emulando um domínio infinito, fontes, etc.

O software de onda eletromagnética - SOEM foi desenvolvido para auxiliar nos estudos deste fenômeno, problemas e aplicações complexas (problemas de geofísica (GPR), interação eletromagnética com tecidos biológicos, teste não destrutivos em materiais, etc), poderá ser útil também quando outras abordagens não computacionais são impraticáveis

O ambiente virtual de estudo SOEM foi elaborado através do *software* Matlab, com sucesso, utilizando o método FDTD em uma e duas dimensões, contendo 5 módulos: um simulador em uma e duas dimensões, um simulador de radar de penetração terrestre (GPR), um módulo de onda espalhada e outro módulo exemplificando a perda de potência de um sinal ao atravessar uma parede. Pretendemos disponibiliza-lo futuramente on-line.

Este trabalho fica disponível como fonte de estudo para futuros trabalhos como: testes em antenas, receptores de radio frequência, GPR, cálculos de perda em alguns meios e ainda, para comparação com outros tipos de métodos numéricos.

## *Referências Bibliográficas*

- BALANIS, C. A. **Advanced Engineering Electromagneticss**. New York: Wiley, 1989.
- BASTOS, João P. A. **Eletromagnetismo para engenharia: estática e quase-estática**. Florianópolis, Ed. da UFSC, 2004.
- BASSON, U. Imaging of active fault zone in the Dead Sea Rift: Evrona Fault Zone as a case study. Department of Geophysics & Planetary Sciences, Tel-Aviv University, 2000.
- ENGQUIST, J; MAJDA, A. **Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves**, Mathematics of Computation, 1977.
- GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Electrodynamics**. 3rd Edition, Addison Wesley, 1999.
- JIN, J. M. **The Finite Element Method in Electromagnetics**. 2nd Edition, Wiley-IEEE Press, May 2002.
- JIN, J. M. **Theory and Computation of Electromagnetic Fields**. John Wiley & Sons, 2011.
- LIMA, C. B. de. Análise de dispositivos eletromagnéticos para hipertermia usando o método fdtd. Doutorado em Eng. Elétrica UFSC, Florianópolis, 2006.
- MUR, G. Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations, **Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on**, 1981.
- OLIVEIRA, R. M. e Silva de. Método fdtd aplicado na análise da propagação eletromagnética em ambientes *Indoor* e *Outdoor*. Graduação em Eng. Elétrica, UFPA, Belém, 2003.
- PICANÇO, R. P. Desenvolvimento de uma interface integrada para o projeto e análise de antenas utiliza o método das diferenças finitas no domínio do tempo. Graduação em Eng. Elétrica Distrito Federal, Universidade de Brasília, 2006.
- SMITH, G. D. **Numerical Solution of Partial Differential Equations**. New York: Oxford, 1969.
- TAFLOVE, A. **Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method**. Norwood MA: Artech House, 1995.
- YEE, K. **Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media**. v. 14, n. 3, p. 302–307, 1966.