INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
COORDENADORIA DE ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

PRE29006	LISTA DE EXERCÍCIOS #3	2016.1

Exercícios

1. [1, Exercício 7.1] Seja A uma variável aleatória uniforme no intervalo $[0, 1]$. Considere o processo estocástico

$$X(t) = \mathrm{e}^{-At}.$$

Calcule a função média e a função autocorrelação do processo $X(t)$.

2. [1, Exercício 7.2] Considere o processo estocástico $X(t)$ definido por

$$X(t) = At^2 + b,$$

onde A é uma variável aleatória Gaussiana de média nula e variância unitária e b é uma constante qualquer.

(a) Determine a função média e a função variância do processo $X(t)$.

(b) Determine a função densidade de probabilidade de primeira ordem do processo, ou seja, determine $f_{X(t)}(x)$.

(c) Determine a função autocorrelação e a função autocovariância do processo $X(t)$.

3. Considere o processo estocástico

$$X(t) = A\,\mathrm{rect}(t),$$

em que A é uma variável aleatória discreta que assume os valores 0, 1 e 2 com igual probabilidade.

(a) Esboce todas as possíveis realizações (isto é, funções-amostra) de $X(t)$.

(b) Determine a função densidade de probabilidade de primeira ordem de $X(t)$.

(c) Determine a função média de $X(t)$.

(d) Determine a função autocorrelação de $X(t)$.

(e) O processo $X(t)$ é estacionário no sentido amplo? Justifique.

4. Sejam A e B variáveis aleatórias independentes tais que A é uniformemente distribuída no intervalo $[-1, +1]$ e B é discreta com $\Pr[B = -1] = \Pr[B = +1] = 1/2$. Seja também $X(t)$ um processo estocástico definido por

$$X(t) = At + B.$$

(a) Determine a função média e a função autocorrelação do processo $X(t)$.

(b) O processo $X(t)$ é estacionário no sentido amplo? Justifique.

5. Seja $B[k]$ um processo estocástico (de parâmetro discreto) em que $B[k] \sim \text{Bernoulli}(p)$, para todo k, com $B[k_1]$ independente de $B[k_2]$ para $k_1 \neq k_2$. Seja

$$X[k] = \begin{cases} -a, & \text{se } B[k] = 0, \\ +a, & \text{se } B[k] = 1, \end{cases}$$

onde a é uma constante. Calcule a função média e a função autocorrelação de $X[k]$.

6. [1, Exercícios 7.10, 7.12]

(a) Determine a densidade espectral de potência $S_X(f)$ de um processo estocástico $X(t)$, estacionário no sentido amplo, com função autocorrelação dada por

$$R_X(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha\tau^2},$$

onde α é uma constante positiva.

(b) Determine a função autocorrelação $R_X(\tau)$ de um processo estocástico $X(t)$, estacionário no sentido amplo, com densidade espectral de potência dada por

$$S_X(f) = \frac{1}{[1 + (2\pi f)^2]^2}.$$

7. [1, Exercício 7.11] Um processo estocástico $X(t)$ é dado por

$$X(t) = A\cos(2\pi F t + \Theta),$$

onde A, F e Θ são variáveis aleatórias estatisticamente independentes tais que:

- A tem média μ_A e variância σ_A^2.
- F é uniformemente distribuída no intervalo $[0, f_0]$.
- Θ é uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$.

(a) Determine a função média e a a função autocorrelação de $X(t)$. Conclua que $X(t)$ é estacionário no sentido amplo.

(b) Determine a potência média de $X(t)$.

(c) Determine a densidade espectral de potência de $X(t)$.

8. [3, Example 9.4] (Modulação AM-DSB-SC) Seja $M(t)$ um processo estocástico estacionário no sentido amplo com média μ_M, função autocorrelação $R_M(\tau)$ e densidade espectral de potência $S_M(f)$. Determine a função média, a função autocorrelação e a densidade espectral de potência de

$$X(t) = M(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta),$$

onde $\Theta \sim \text{Unif}(0, 2\pi)$ e f_c é uma constante. Considere $M(t)$ e Θ independentes.

9. [3, Example 9.2] (Ruído branco após filtragem passa-baixa) Determine a função autocorrelação $R_X(\tau)$ e a potência média P_X de um processo estocástico estácionario no sentido amplo $X(t)$ cuja densidade espectral de potência é dada por

$$S_X(f) = \begin{cases} n_0/2, & \text{se } |f| < f_0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

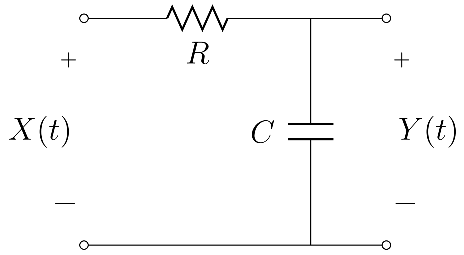
onde n_0 e f_0 são constantes positivas.

10. [2, Problems 18.28, 18.29] Determine e esboce a função autocorrelação e a função densidade espectral de potência do sinal na saída de um sistema linear invariante no tempo com resposta ao impulso $h(t)$, supondo na entrada ruído branco $X(t)$ com média nula e função autocorrelação $R_X(\tau) = (n_0/2)\delta(\tau)$, para:

(a) $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0}\mathrm{e}^{-t/t_0}, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$ (b) $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0}, & \text{se } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Considere que n_0 e t_0 sejam constantes positivas.

11. [2, Exemplo 7.8] Considere um processo estocástico de ruído branco $X(t)$ com média nula e densidade espectral de potência dada por $S_X(f) = n_0/2$, onde n_0 é uma constante positiva. Determine a média, a função autocorrelação, a densidade espectral de potência e a potência média do processo estocástico $Y(t)$ obtido pela passagem de $X(t)$ através do filtro RC mostrado abaixo.



12. [1, Exercício 7.6] Um processo estocástico gaussiano $X(t)$ tem média nula e função autocorrelação

$$R_X(t_1, t_2) = 2^{-|t_2 - t_1|}.$$

Uma pessoa que desconhece o valor da média do processo $X(t)$ e que tem acesso a uma função amostra do mesmo resolve estimar esta média por

$$M = \frac{X(0) + X(1) + X(2)}{3}.$$

Note que M é uma variável aleatória. Determine a probabilidade de que o módulo do erro cometido exceda o valor 1, ou seja, determine

$$\Pr[|M| > 1].$$

13. [1, Exercício 7.7] Seja $X(t)$ um processo estocástico gaussiano de média nula e função autocorrelação dada por

$$R_X(t_1, t_2) = a\,\mathrm{e}^{-|t_2 - t_1|},$$

onde a é uma constante positiva. Sabe-se que a variável aleatória $X(20)$, definida no instante $t = 20$, excede o valor 6 com probabilidade 0,13499%. Seja

$$Y(t) = X(t) + X(t - b),$$

onde b é uma constante.

(a) Determine o valor da constante a.

(b) Determine a função média e a função autocorrelação do processo $Y(t)$, concluindo sobre sua estacionariedade no sentido amplo.

(c) Calcule o coeficiente de correlação de Pearson entre $Y(0)$ e $Y(2)$, para $b = 1$.

14. [1, Exercício 7.13] Um processo estocástico gaussiano $X(t)$ tem função média

$$\mu_X(t) = \frac{1}{2}$$

e função autocorrelação

$$R_X(\tau) = 2\delta(\tau).$$

O processo $X(t)$ passa através de um sistema linear cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t),$$

(onde $u(t)$ denota a função degrau unitário), resultando no processo estocástico $Y(t)$. Determine a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias $Y(0)$ e $Y(1)$, ou seja, determine $f_{Y(0),Y(1)}(y_0, y_1)$.

15. Seja $X[k]$ um processo estocástico de parâmetro discreto, em que

$$\ldots, X[-2], X[-1], X[0], X[1], X[2], \ldots$$

são variáveis aleatórias gaussianas i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) de média 0 e variância 1. Seja

$$Y[k] = X[k] - X[k-1].$$

(a) Determine e esboce a função autocovariância de $Y[k]$, em função de $\ell = k_2 - k_1$.
(b) Determine a função densidade de probabilidade de $Y[8]$.
(c) Calcule $\Pr[Y[8] > 0 \mid Y[6] > 0]$.

16. Considere um processo estocástico de tempo discreto $X[k]$, definido por

$$\begin{aligned} X[k] &= aX[k-1] + W[k], \text{ para } k = 1, 2, \ldots, \\ X[0] &= 0, \end{aligned}$$

onde $W[1], W[2], \ldots,$ são variáveis aleatórias, todas de média μ_W.

(a) Determine a função média de $X[k]$, para $a = 1$.
(b) Determine a função média de $X[k]$, para $a = 2$.
(c) O processo é estacionário no sentido amplo? Justifique.

Exercícios complementares

1. Demonstre os seguintes fatos.

(a) Se $X(t)$ é estacionário de ordem n, então $X(t)$ é estacionário de ordem $n-1$.
(Por simplicidade, prove para o caso particular $n = 3$.)
(b) Se $X(t)$ é estacionário de 2ª ordem, então $X(t)$ é estacionário no sentido amplo.
(Como visto em sala de aula através de um contra-exemplo, a recíproca é falsa!)

2. Seja $R_X(\tau)$ a função autocorrelação e $S_X(f)$ a densidade espectral de potência de um processo estocástico real $X(t)$ estacionário no sentido amplo. Mostre que:

(a) $R_X(\tau)$ é par, isto é, $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$.
(b) $R_X(0) = \mathrm{E}[X^2(t)] = P_X$ [potência média de $X(t)$ = valor médio quadrático de $X(t)$].
(c) $|R_X(\tau)|$ assume seu valor máximo em $\tau = 0$.
(*Dica:* Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o valor esperado: $\mathrm{E}[XY]^2 \leq \mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2]$.)
(d) $S_X(f) = 2\int_0^\infty R_X(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$.
(*Dica:* Utilize o teorema de Wiener-Khinchin e a fórmula de Euler.)
(e) $S_X(f)$ é real e par.
(*Dica:* Utilize os itens (a) e (d).)
(f) $S_X(f) \geq 0$, para todo f.

Referências

[1] J. P. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*. Editora Interciência, 2008.

[2] S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®*. Springer, 2006.

[3] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.

Respostas

1. $\mu_X(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}$ e $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-(t_1+t_2)}}{t_1 + t_2}$.

2. (a) $\mu_X(t) = b$, $\sigma_X^2(t) = t^4$. (b) $f_{X(t)}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2t^4}}$.
(c) $R_X(t_1, t_2) = t_1^2 t_2^2 + b^2$, $K_X(t_1, t_2) = t_1^2 t_2^2$.

3. (a) 0, $\mathrm{rect}(t)$, $2\,\mathrm{rect}(t)$. (b) $f_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{1}{3}\delta(x-1) + \frac{1}{3}\delta(x-2), & \text{se } |t| \leq 1/2, \\ \delta(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$
(c) $\mu_X(t) = \mathrm{rect}(t)$. (d) $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{5}{3}\,\mathrm{rect}(t_1)\,\mathrm{rect}(t_2)$. (e) Não.

4. (a) $\mu_X(t) = 0$, $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{1}{3}t_1 t_2 + 1$. (b) Não.

5. $\mu_X[k] = a(2p-1)$, $R_X[k_1, k_2] = \begin{cases} a^2, & \text{se } k_1 = k_2, \\ a^2(2p-1)^2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

6. (a) $S_X(f) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{(\pi f)^2}{\alpha}}$. (b) $R_X(\tau) = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{-|\tau|}) \star (\mathrm{e}^{-|\tau|}) = \dfrac{1}{4}(1 + |\tau|)\mathrm{e}^{-|\tau|}$.

7. (a) $\mu_X(t) = 0$ e $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{\sigma_A^2 + \mu_A^2}{2}\,\mathrm{sinc}\big(2f_0(t_2 - t_1)\big)$. (b) $P_X = \dfrac{\sigma_A^2 + \mu_A^2}{2}$.
(c) $S_X(f) = \dfrac{\sigma_A^2 + \mu_A^2}{4f_0}\,\mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{2f_0}\right)$.

8. $\mu_X = 0$, $R_X(\tau) = \dfrac{1}{2}R_M(\tau)\cos(2\pi f_c \tau)$ e $S_X(f) = \dfrac{1}{4}[S_M(f + f_c) + S_M(f - f_c)]$.

9. $R_X(\tau) = n_0 f_0\,\mathrm{sinc}(2f_0\tau)$ e $P_X = n_0 f_0$.

10. (a) $R_Y(\tau) = \dfrac{n_0}{4t_0}\mathrm{e}^{-\frac{|\tau|}{t_0}}$ e $S_Y(f) = \dfrac{n_0}{2}\dfrac{1}{1 + (2\pi t_0 f)^2}$. (b) $R_Y(\tau) = \dfrac{n_0}{2t_0}\,\mathrm{tri}\left(\dfrac{\tau}{t_0}\right)$ e $S_Y(f) = \dfrac{n_0}{2}\,\mathrm{sinc}^2(t_0 f)$.

11. $\mu_Y = 0$, $R_Y(\tau) = \dfrac{n_0}{4RC}\mathrm{e}^{-\frac{|\tau|}{RC}}$, $S_Y(f) = \dfrac{n_0/2}{1 + (2\pi RCf)^2}$, $P_Y = \dfrac{n_0}{4RC}$.

12. $2\,Q(\sqrt{18/11}) = 0{,}201$

13. (a) $a = 4$. (b) $\mu_Y(t) = 0$, $R_Y(t_1, t_2) = 8\mathrm{e}^{-|\tau|} + 4\mathrm{e}^{-|\tau - b|} + 4\mathrm{e}^{-|\tau + b|}$, onde $\tau = t_2 - t_1$. (c) $0{,}252$.

14. $\begin{bmatrix} Y(0) \\ Y(1) \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{4} \\ \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\right)$, de onde pode ser obtido $f_{Y(0),Y(1)}(y_0, y_1)$.

15. (a) $R_Y[\ell] = \begin{cases} 2, & \text{se } \ell = 0, \\ 1, & \text{se } \ell = \pm 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ (b) $f_{Y(8)}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}$. (c) $\dfrac{1}{2}$.

16. (Em breve.)

Obs.: $\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1/2, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$ $\mathrm{tri}(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$ $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}$.