

MATRIZES

As matrizes são ferramentas básicas da Álgebra Linear, pois além de fornecerem meios para resolução dos sistemas de equações lineares, elas também representarão as transformações lineares entre espaços vetoriais, como veremos futuramente.

Uma Aplicação Real

vivo

Tabela de Preços do iPhone



Plano	iPhone 8GB	iPhone 16GB
Vivo Escolha 50	R\$ 1.499	R\$ 1.789
Vivo Escolha 90	R\$ 1.389	R\$ 1.669
Vivo Escolha 150*	R\$ 1.299	R\$ 1.579
Vivo Escolha 180	R\$ 1.249	R\$ 1.529
Vivo Escolha 350	R\$ 1.199	R\$ 1.479
Vivo Escolha 650	R\$ 999	R\$ 1.279
Vivo Escolha 900	R\$ 999	R\$ 1.279
Vivo Completo	R\$ 899	R\$ 1.199

Nota: Valores máximos de referência que o cliente pagará no caso de escolher um dos Planos Vivo Escolha. O cliente ainda usufruirá dos Pontos do Programa de Pontos, podendo resgatar o aparelho por um valor ainda menor.

*Plano específico para o iPhone

Definição de Matriz

Dados m e n números naturais, definimos uma matriz real de ordem m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Consideremos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

$a_{13} = 2$

$a_{34} = 7$

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

As matrizes podem ser classificadas segundo:

A forma

A natureza dos elementos

Segundo a forma em:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Rectangular

Se o número de linhas é diferente do número de colunas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

Quadrada

Se o número de linhas é igual do número de colunas

Uma matriz quadrada do tipo m por m diz-se de ordem m

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Linha

Se o número de linhas é igual a um

$$[1 \ 2 \ 2]_{1 \times 3}$$

Coluna

Se o número de colunas é igual a um

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Segundo a natureza dos elementos em:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Real se todos os seus elementos são reais

$$\forall a_{ij} \in A: a_{ij} \in \mathfrak{R}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Complexa se pelo menos um dos seus elementos é complexo

$$\exists a_{ij} \in A: a_{ij} \in \mathbb{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

Nula se todos os seus elementos são nulos

$$\forall a_{ij} \in A: a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segundo a natureza dos elementos em:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Triangular Superior uma matriz **quadrada** em que os elementos **abaixo** da diagonal principal são nulos

$$\forall a_{ij} \in A: i > j \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Triangular Inferior uma matriz **quadrada** em que os elementos **acima** da diagonal principal são nulos

$$\forall a_{ij} \in A: i < j \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Segundo a natureza dos elementos em:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Diagonal uma matriz **quadrada** em que os elementos não principais são nulos

$$\forall a_{ij} \in A: i \neq j \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Escalar uma matriz **diagonal** em que os elementos principais são iguais

$$\forall a_{ij} \in A: i \neq j \quad a_{ij} = 0$$

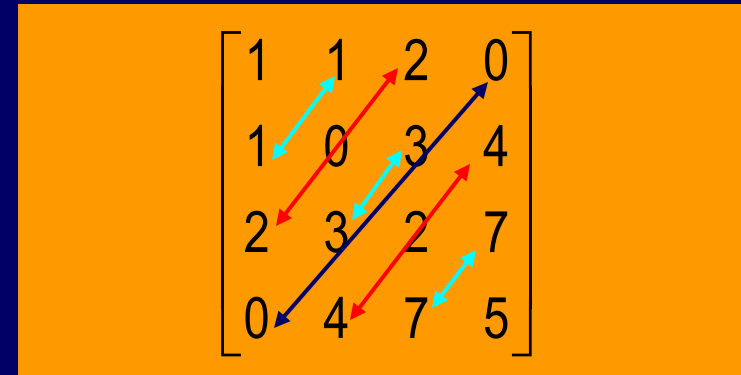
$$i = j \quad a_{ij} = \lambda$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Segundo a natureza dos elementos em:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Simétrica se os elementos a_{ij} são iguais aos a_{ji}



A 4x4 matrix is shown with elements and arrows indicating symmetry. The matrix is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

The matrix is symmetric, as indicated by the arrows pointing from the upper triangular elements to their corresponding lower triangular elements. The diagonal elements are 1, 0, 2, and 5.

Densa se a maioria dos seus elementos são **não** nulos

Dispersa se a maioria dos seus elementos são nulos

Soma de Matrizes

Sejam A e B duas matrizes **do mesmo tipo** denomina-se soma de A com B a uma matriz **C do mesmo tipo** que se obtêm somando os elementos da matriz A com os elementos da matriz B da mesma posição.

$$\forall A, B \in M_{m \times n} \quad \exists C \in M_{m \times n} : C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} ; i = 1, \dots, m \wedge j = 1, \dots, n$$

Diagram illustrating the addition of two matrices A and B to get matrix C. The matrices are:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

The resulting matrix C is:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

The diagram shows arrows connecting corresponding elements of A and B to the elements of C. For example, a blue arrow connects the element 1 in the first row, first column of A to the element 3 in the first row, first column of C. A yellow arrow connects the element 2 in the first row, second column of A to the element 3 in the first row, second column of C. A red arrow connects the element 3 in the first row, third column of A to the element 6 in the first row, third column of C. Similar arrows connect the other elements of the matrices.

A soma de matrizes **do mesmo tipo** goza das seguintes propriedades:

Comutativa

$$\forall A, B \in M_{m \times n} \quad A + B = B + A$$

Associativa

$$\forall A, B, C \in M_{m \times n} \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

Tem elemento neutro

$$\forall A \in M_{m \times n} \quad \exists O \in M_{m \times n} : A + O = A$$

Todos os elementos têm inversa

$$\forall A \in M_{m \times n} \quad \exists B \in M_{m \times n} : A + B = O$$

A soma de matrizes **do mesmo tipo** goza das seguintes propriedades:

Comutativa

Associativa

Tem elemento neutro

Todos os elementos têm inversa

Produto por um escalar

Sejam A uma matriz e λ um escalar

O produto de λ por A é uma matriz C do mesmo tipo de A que se obtêm de A multiplicando todos os seus elementos por λ

$$\forall A \in M_{m \times n} \quad \lambda A \in M_{m \times n} : C = \lambda A$$

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} ; i = 1, \dots, m \wedge j = 1, \dots, n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes A e B **do mesmo tipo**

e os escalares λ e μ as seguintes propriedades são válidas:

$$(\lambda \mu)A = \lambda (\mu A)$$

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$$

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$1 A = A$$

Consideremos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Matriz de ordem m por n de elementos a_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

The diagram illustrates the multiplication of two matrices. The first matrix is 2×3 (green label). The second matrix is 3×3 (red label). The result is a 2×3 matrix (purple label). A red arrow points from the 3×3 label to the 2×3 label of the first matrix, and another red arrow points from the 3×3 label to the 2×3 label of the result matrix. A purple arrow points from the 2×3 label of the first matrix to the 2×3 label of the result matrix. A red arrow with a minus sign points from the 3×3 label to the 2×3 label of the first matrix, indicating the operation.

The diagram illustrates the dot product of two matrices. On the left, a 2×3 matrix is shown with its first row highlighted in red. This matrix is multiplied by a 3×3 matrix, where its first column is highlighted in yellow. The result is a 2×3 matrix, with the value 8 in its first row highlighted in orange. White curved lines connect the elements of the first row of the first matrix to the corresponding elements of the first column of the second matrix, and then to the element 8 in the resulting matrix.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ & & \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ & & \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & & \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & 15 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & 27 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Produto de Matrizes

Seja **A** uma matriz de tipo **mxn** e **B** uma matriz do tipo **nxp**.

O produto de A por B é uma matriz **C** do tipo **mxp**

cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

e escreve-se $C=AB$.

O produto de matrizes não é comutativo

Dadas as matrizes A , B e C , e α um escalar.

Então, se todos os produtos a seguir indicados **forem definidos**, as seguintes propriedades são válidas:

$$(AB)C = A(B C)$$

$$(A+B) C = A C + B C$$

$$A (B + C) = A B + A C$$

$$\alpha (AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

Transposição de Matrizes

Seja A uma matriz de tipo **mxn**.

Denomina-se **transposta de A** a uma matriz B do tipo **nxm** tal que:

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$$

e escreve-se $B = A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 3}$$

Dadas as matrizes A e B e α um escalar.

Então, se todas as operações a seguir indicados **forem definidas**, as seguintes propriedades são válidas:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$