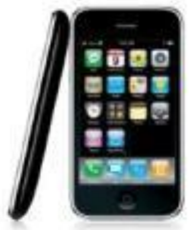
MATRIZES

As matrizes são ferramentas básicas da Álgebra Linear, pois além de fornecerem meios para resolução dos sistemas de equações lineares, elas também representarão as transformações lineares entre espaços vetoriais, como veremos futuramente.

Uma Aplicação Real

vivo

Tabela de Preços do iPhone



iPhone3G vivo

Plano	iPhone 8GB	iPhone 16GB
Vivo Escolha 50	R$ 1.499	R$ 1.789
Vivo Escolha 90	R$ 1.389	R$ 1.669
Vivo Escolha 150*	R$ 1.299	R$ 1.579
Vivo Escolha 180	R$ 1.249	R$ 1.529
Vivo Escolha 350	R$ 1.199	R$ 1.479
Vivo Escolha 650	R$ 999	R$ 1.279
Vivo Escolha 900	R$ 999	R$ 1.279
Vivo Completo	R$ 899	R$ 1.199

Nota: Valores máximos de referência que o cliente pagará no caso de escolher um dos Planos Vivo Escolha. O cliente ainda usufruirá dos Pontos do Programa de Pontos, podendo resgatar o aparelho por um valor ainda menor.

*Plano específico para o iPhone

Definição de Matriz

Dados m e n números naturais, definimos uma matriz real de ordem m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$ Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{3x5}$$

$a_{13} = \mathbf{2}$

$a_{34} = \mathbf{7}$

$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$ Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

As matrizes podem ser classificadas segundo:

A forma

A natureza dos elementos

Segundo a forma em:

$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$

Rectangular

Se o número de linhas é diferente do número de colunas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 5}$$

Quadrada

Se o número de linhas é igual do número de colunas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Uma matriz quadrada do tipo m por m diz-se de ordem m

Linha

Se o número de linhas é igual a um

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

Coluna

Se o número de colunas é igual a um

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Segundo a natureza dos elementos em: $A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$

Real se todos os seus elementos são reais

$$\forall\, a_{ij} \in A: \quad a_{ij} \in \Re$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Complexa se pelo menos um dos seus elementos é complexo

$$\exists\, a_{ij} \in A: \quad a_{ij} \in C$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

Nula se todos os seus elementos são nulos

$$\forall\, a_{ij} \in A: \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segundo a natureza dos elementos em: $A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$

Triangular Superior uma matriz quadrada em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos

$$\forall\, a_{ij} \in A:\ i > j \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Triangular Inferior uma matriz quadrada em que os elementos acima da diagonal principal são nulos

$$\forall\, a_{ij} \in A:\ i < j \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Segundo a natureza dos elementos em: $A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$

Diagonal uma matriz quadrada em que os elementos não principais são nulos

$$\forall\, a_{ij} \in A:\ i \neq j \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Escalar uma matriz diagonal em que os elementos principais são iguais

$$\forall\, a_{ij} \in A:\ i \neq j \quad a_{ij} = 0$$
$$i = j \quad a_{ij} = \lambda$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Segundo a natureza dos elementos em: $A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$

Simétrica se os elementos a_{ij} são iguais aos a_{ji}

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Densa se a maioria dos seus elementos são não nulos

Dispersa se a maioria dos seus elementos são nulos

Soma de Matrizes

Sejam A e B duas matrizes **do mesmo tipo** denomina-se soma de A com B a uma matriz C do mesmo tipo que se obtêm somando os elementos da matriz A com os elementos da matriz B da mesma posição.

$$\forall\ A,B \in M_{m\times n} \quad \exists C \in M_{m\times n} : C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ ;\ i = 1,\ldots,m \wedge j = 1,\ldots,n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

A soma de matrizes do mesmo tipo goza das seguintes propriedades:

Comutativa

$$\forall\ A,B \in M_{m\times n}\quad A+B=B+A$$

Associativa

$$\forall\ A, B, C \in M_{m\times n}\quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

Tem elemento neutro

$$\forall\ A \in M_{m\times n}\ \exists\, O \in M_{m\times n} : A+O=A$$

Todos os elementos têm inversa

$$\forall\ A \in M_{m\times n}\ \exists\, B \in M_{m\times n} : A+B=O$$

A soma de matrizes do mesmo tipo goza das seguintes propriedades:

Comutativa

Associativa

Tem elemento neutro

Todos os elementos têm inversa

Produto por um escalar

Sejam A uma matriz e λ um escalar

O produto de λ por A é uma matriz C do mesmo tipo de A

que se obtêm de A multiplicando todos os seus elementos por λ

$$\forall A \in M_{m\times n} \quad \lambda A \in M_{m\times n} : C = \lambda A$$

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \; ; i = 1, \ldots, m \wedge j = 1, \ldots, n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad 3A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes A e B do mesmo tipo

e os escalares λ e μ as seguintes propriedades são válidas:

$$(\lambda\ \mu)A = \lambda\,(\mu\ A)$$

$$(\lambda + \mu)\ A = \lambda\ A + \mu\ A$$

$$\lambda\,(A + B) = \lambda\ A + \lambda\ B$$

$$1\,A = A$$

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$ Matriz de ordem m por n de elementos a_{ij}

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$=$

$$\underset{2x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}} \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{bmatrix} \boxed{8} & & \\ & & \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 2 \quad 5 \quad 3 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} 8 & \boxed{12} & \\ & & \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 2 \quad 5 \quad 3 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & \boxed{15} \\ & & \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \quad 5 \quad 3} \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ & & \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$\underset{2x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}} \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ \boxed{15} & & \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}\ \text{2x3} \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\ \text{3x3} \quad = \quad \begin{bmatrix}8 & 12 & 15\\ 15 & \boxed{29} & \end{bmatrix}\ \text{2x3}$$

$$\underset{2x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}} \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & \boxed{27} \end{bmatrix}}$$

Produto de Matrizes

Seja A uma matriz de tipo mxn e B uma matriz do tipo nxp.

O produto de A por B é uma matriz C do tipo mxp

cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj}$$

e escreve-se C=AB.

O produto de matrizes não é comutativo

Dadas as matrizes A, B e C, e α um escalar.

Então, se todos os produtos a seguir indicados **forem definidos**, as seguintes propriedades são válidas:

$$(AB)C = A(B\ C)$$

$$(A+B\ )\ C = A\ C + B\ C$$

$$A\ (B + C) = A\ B + A\ C$$

$$\alpha\ (AB) = (\alpha\ A)B = A(\alpha\ B)$$

Transposição de Matrizes

Seja A uma matriz de tipo **mxn**.
Denomina-se **transposta de A** a uma matriz B do tipo **nxm** tal que:

$$b_{ij} = a_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, n;\; j = 1, \ldots m)$$

e escreve-se B=**A^T**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times5} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times3}$$

Dadas as matrizes A e B e α um escalar.

Então, se todos as operações a seguir indicados **forem definidas**, as seguintes propriedades são válidas:

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$\left(\alpha\ A^T\right) = \left(\alpha\ A\right)^T$$

$$\left(AB\right)^T = B^T\ A^T$$