

Matemática Financeira

Juros compostos

Adriano Leal Bruni

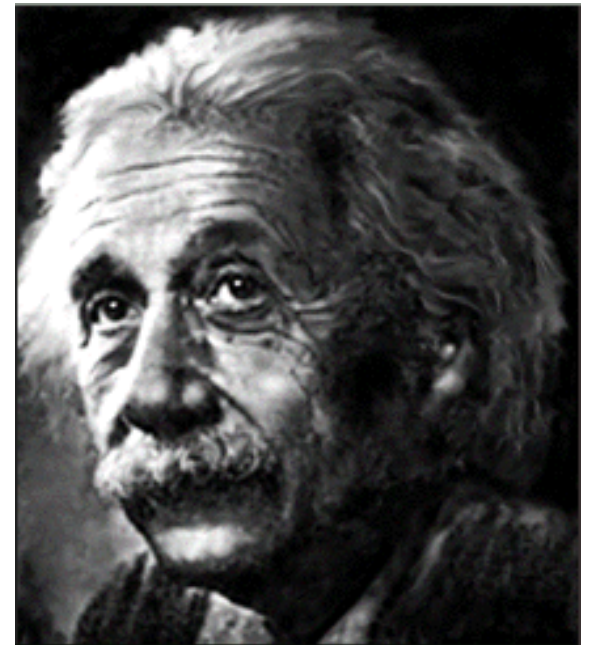
albruni@minhasaulas.com.br

Para pensar ...

BRUNI

"O juro composto é a maior invenção da humanidade, porque permite uma confiável e sistemática acumulação de riqueza".

Albert Einstein



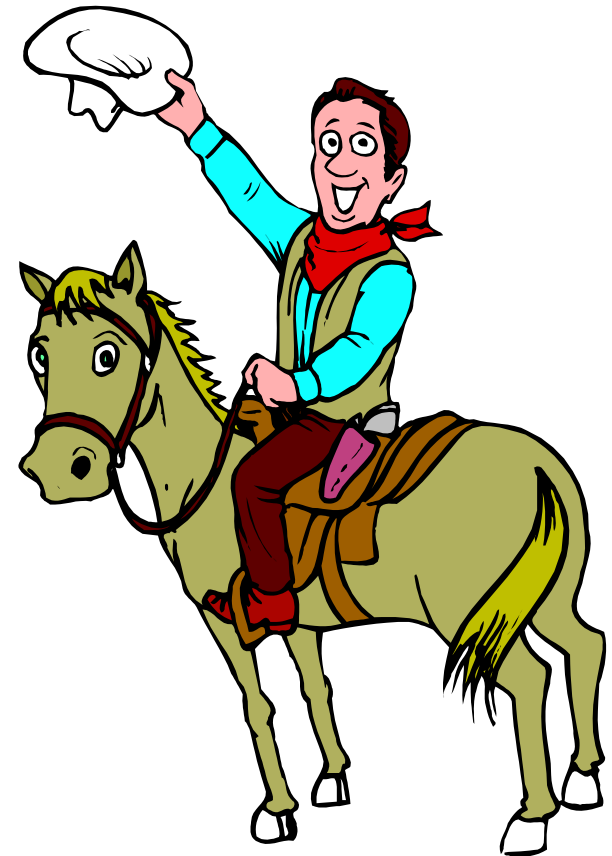
- Entender operações com juros compostos
- Saber usar a equivalência de taxas
- Compreender as operações com equivalência de capitais



Juros sempre sobre o

MONTANTE

ANTERIOR

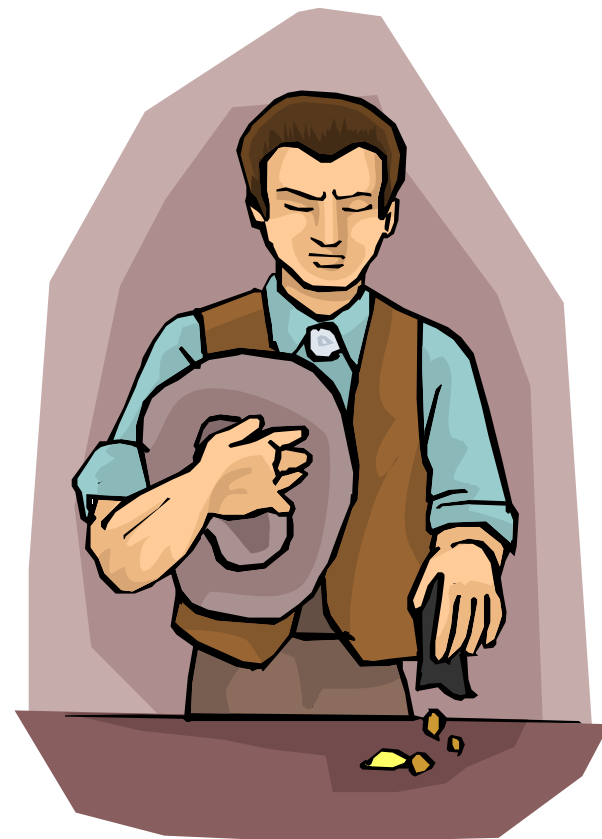


Preste atenção!!!

BRUNI

- **Empréstimo**
- **Valor atual na data zero igual a \$100,00**
- **Taxa igual a 10% a.p.**

Considere *juros compostos*



Juros compostos

BRUNI

n	Juros	VF	Juros compostos sempre incidem sobre montante
0	-	100,00	VF=VP
1	10,00 <small>10% x \$100</small>	110,00	VF=VP (1+i)
2	11,00 <small>10% x \$110</small>	121,00	VF=VP (1+i) (1+i)
n	$i \cdot VF_{\text{ant}}$	VF	$VF=VP (1+i)^n$

- **Juros sobre montante**
- **Montante inclui juros**

**Juros sobre
juros**



$$VF = VP (1 + i)^n$$

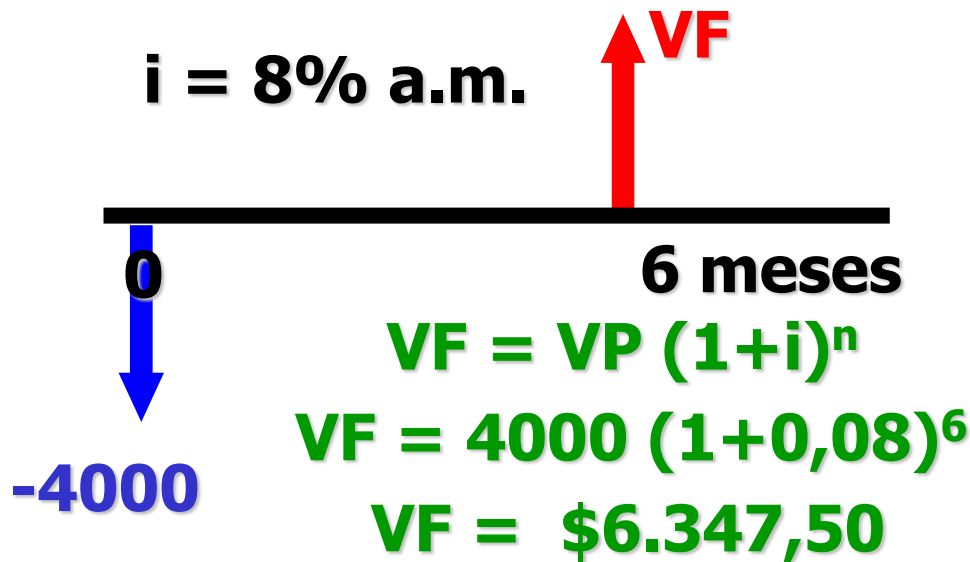
Expoente!

Desafio matemático ...

Contas mais difíceis ...



- Um investidor aplicou \$4.000,00 por seis meses a uma taxa composta igual a 8% a.m. Calcule o valor do resgate.



- Para facilitar as contas ...

$$VF = VP (1 + i)^n$$

$$a_{n,i} = (1 + i)^n$$

Tabelas padronizadas

coluna
linha



Para o exemplo

BRUNI

$n=6$ $i=8\%$

$i = 8\% \text{ a.m.}$

↑ VF

↓ 0 -4000

6 meses

n i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4695	1,5386	1,6100
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937

$$a_{6,8} = 1,5869$$



Substituindo $a_{n,i}$

BRUNI

$i = 8\% \text{ a.m.}$

↑ VF

↓ -4000

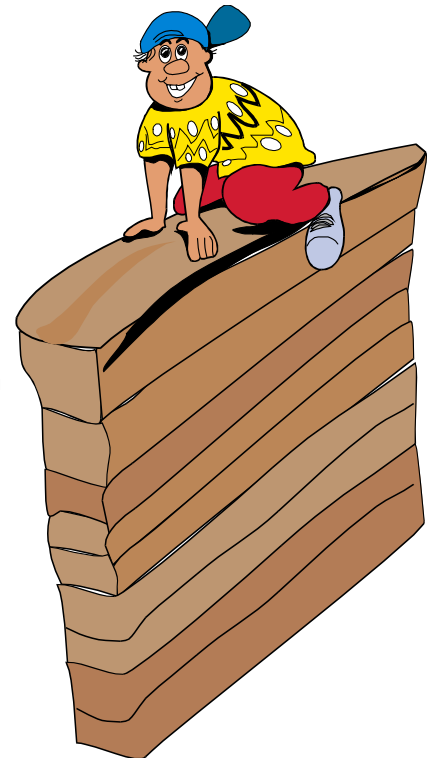
6 meses

$$VF = VP (1+i)^n$$

$$VF = VP \cdot a_{n,i}$$

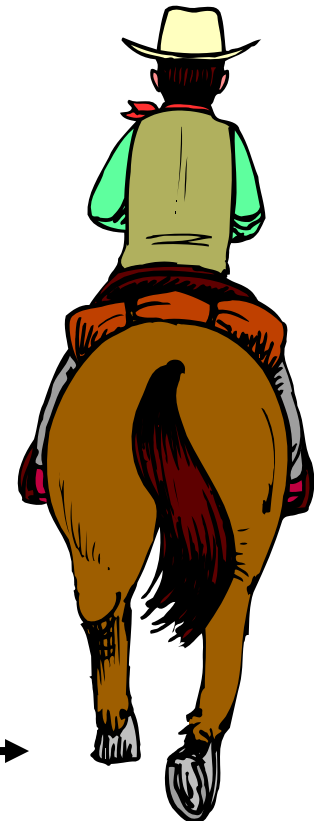
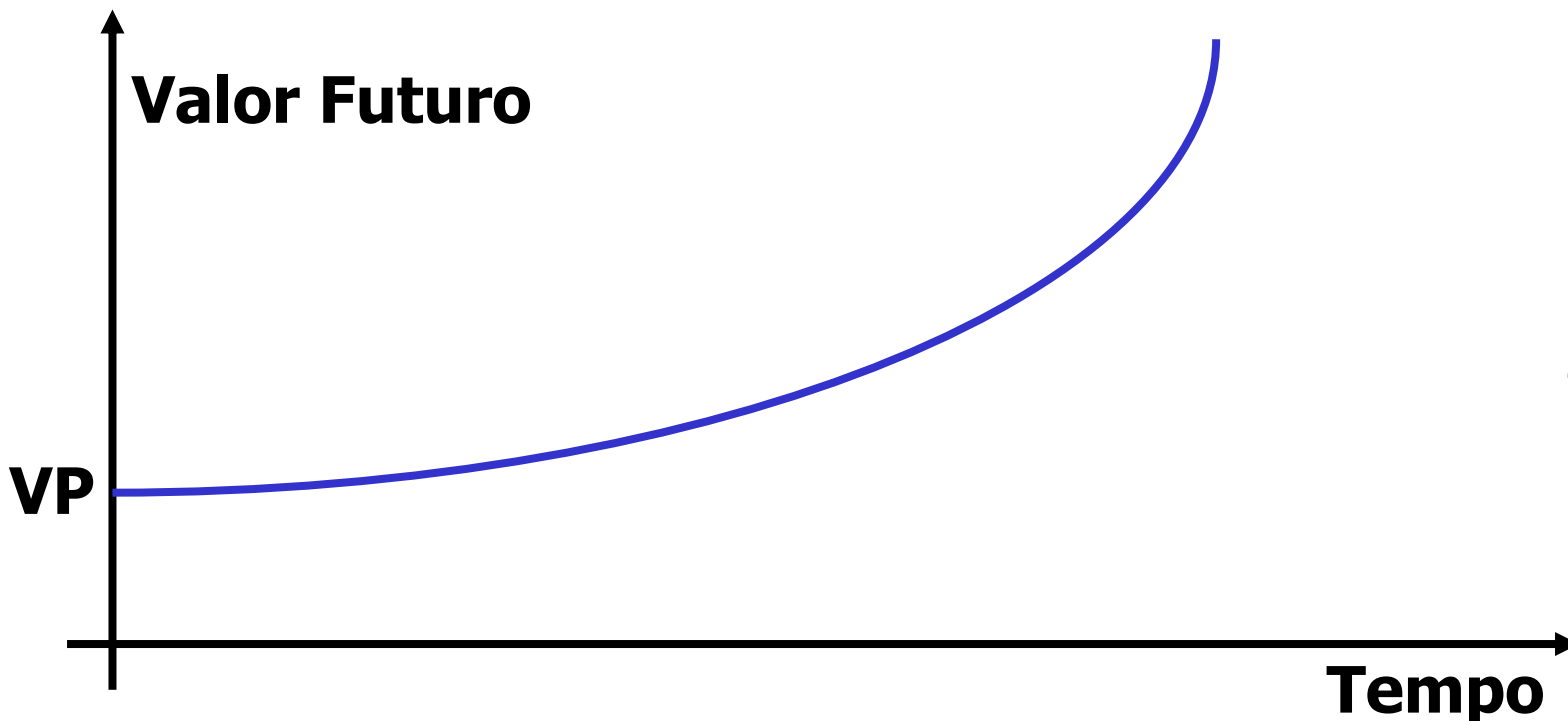
$$VF = 4000 \cdot (1,5869)$$

$$VF = \$6.347,50$$



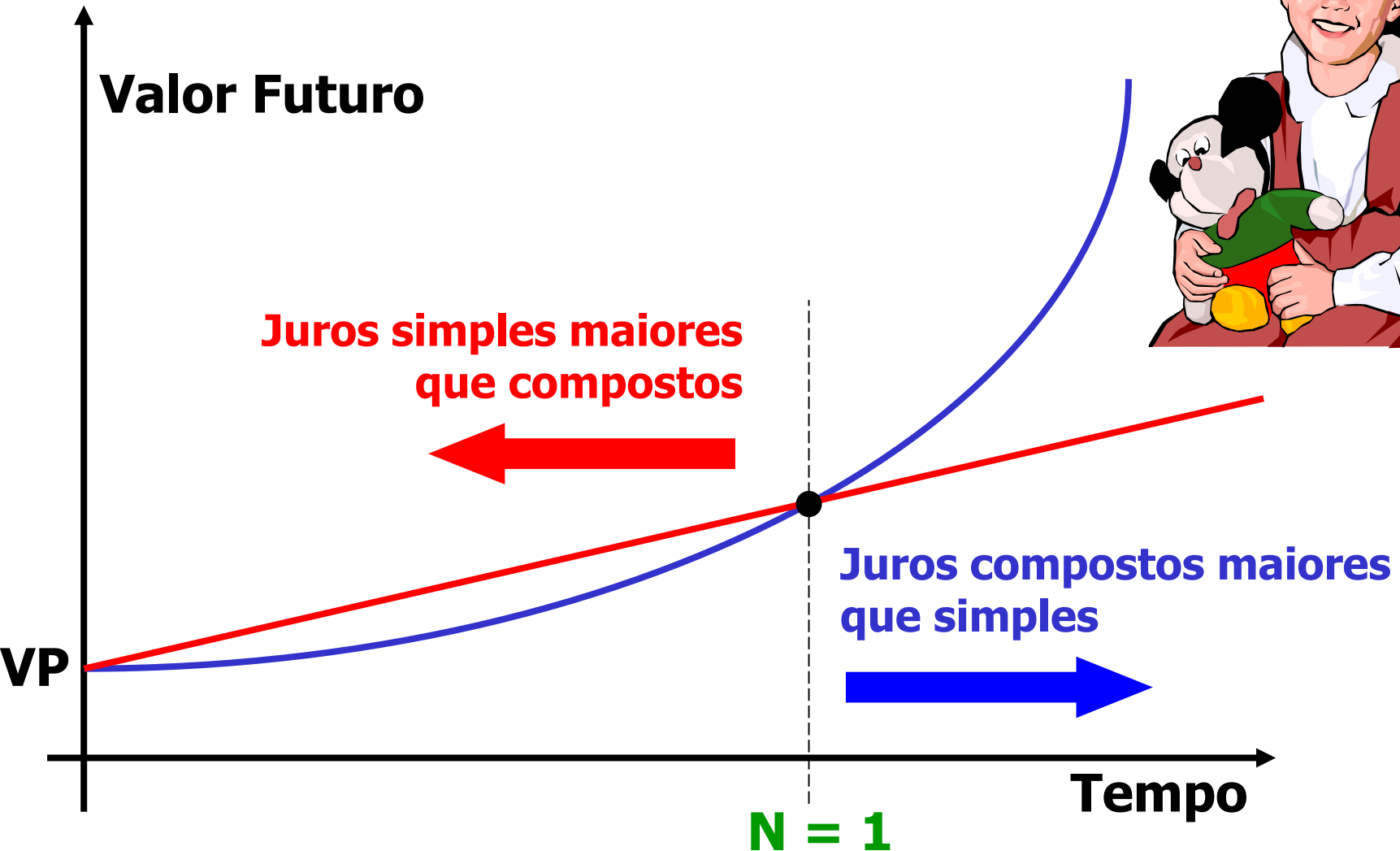
- Juros incidem sobre juros
- Valor futuro cresce exponencialmente

Capitalização Exponencial

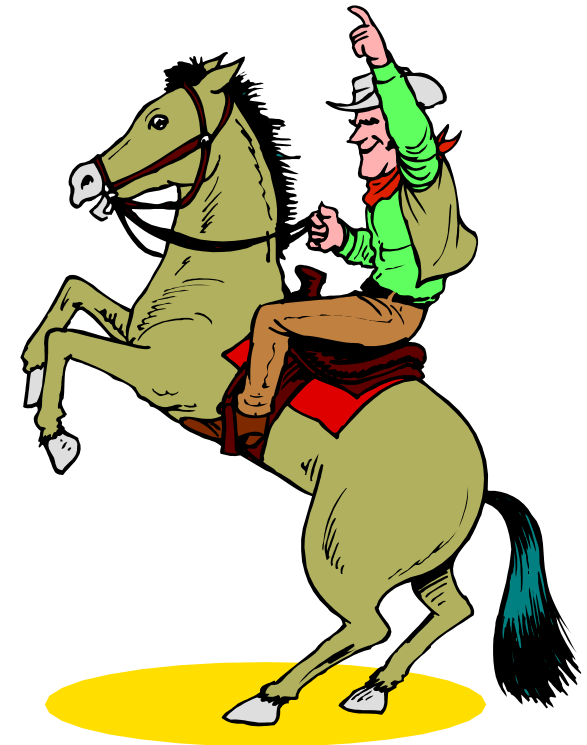


Compostos superam simples?

BRUNI

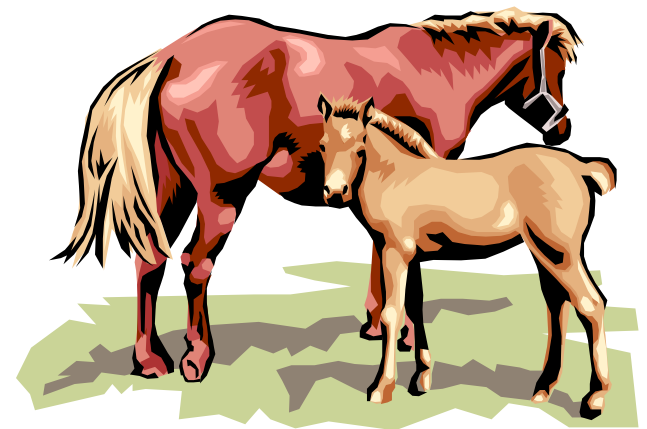


- $N < 1$
 - Juros simples são maiores que juros compostos
- $N = 1$
 - Juros simples são iguais a juros compostos
- $N > 1$
 - Juros compostos são maiores que juros simples



- “Dois ou mais capitais nominais, supostos com datas de vencimento determinadas, dizem-se equivalentes quando, descontados para uma data focal, à mesma taxa de juros, e em idênticas condições, produzem valores iguais”.

(mesmo conceito em juros simples)

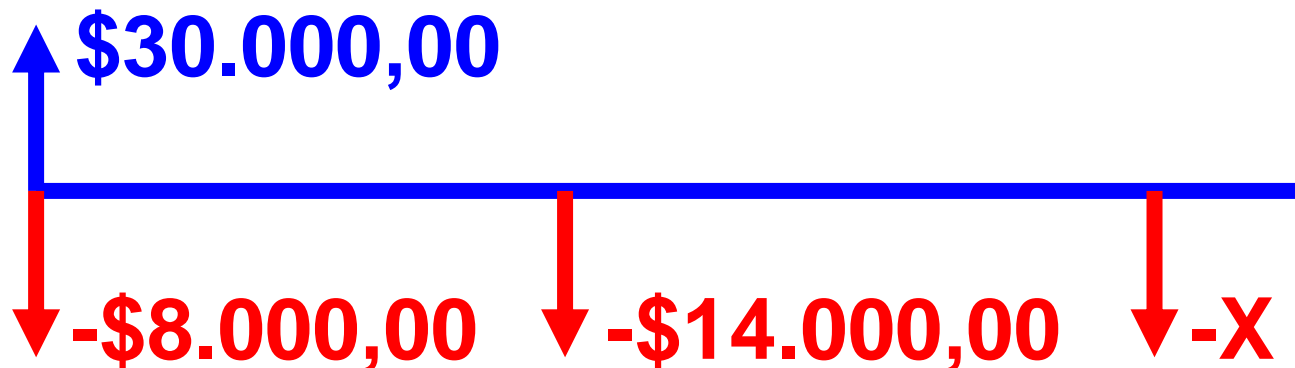


Exemplo G

BRUNI

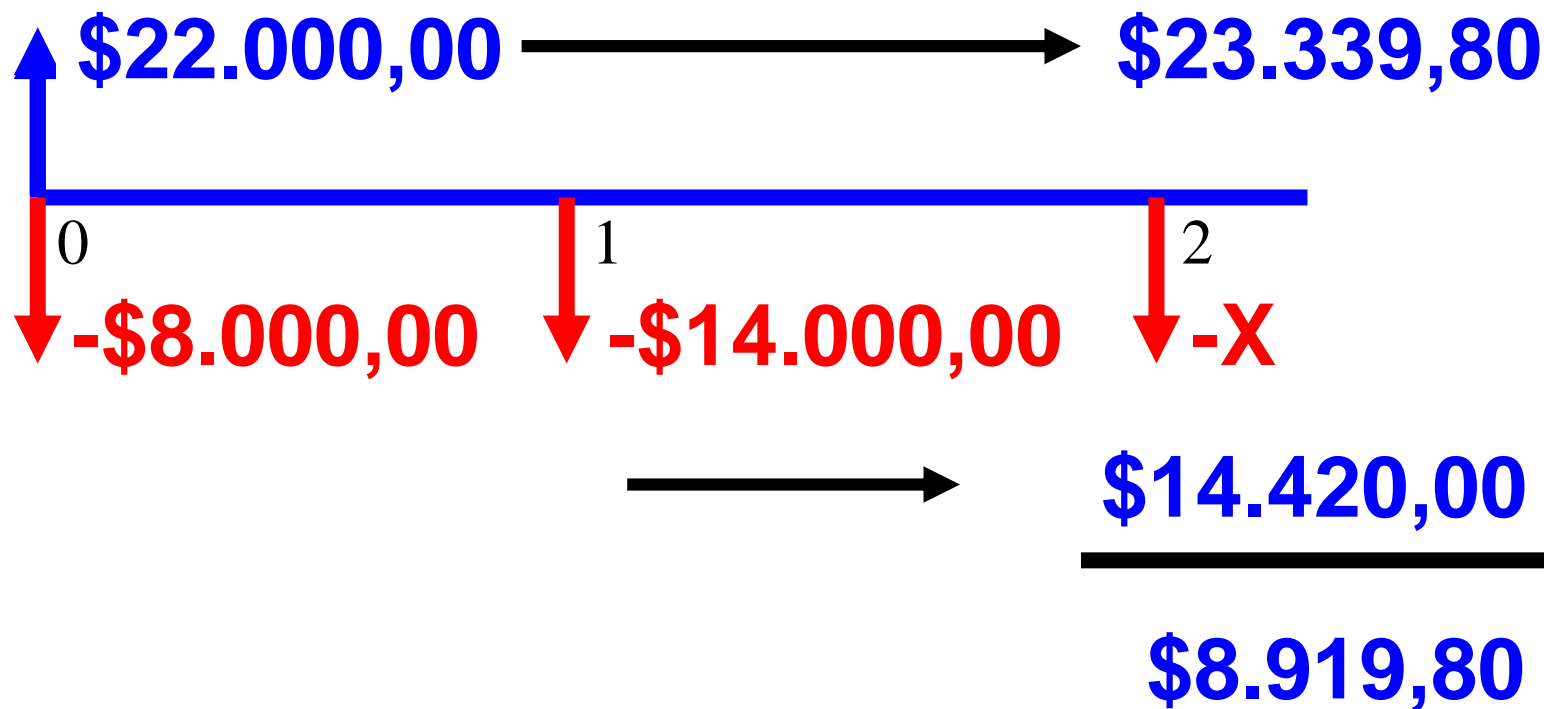
- Pedro pensa em comprar um carro novo, com preço a vista igual a \$30.000,00.
- Pagará uma entrada de \$8.000,00
- Pagará \$14.000,00 em 30 dias
- Pagará X em 60 dias
- Taxa **composta** igual a 3% a.m.

Calcule o valor de X



Taxa composta igual a 3% a.m.

BRUNI



Capitalizando \$22.000,00

$$VF = VP (1+i)^n$$

$$VF = 22000 (1+0,03)^2$$

$$VF = \$23.339,80$$

Capitalizando \$14.000,00

$$VF = VP (1+i)^n$$

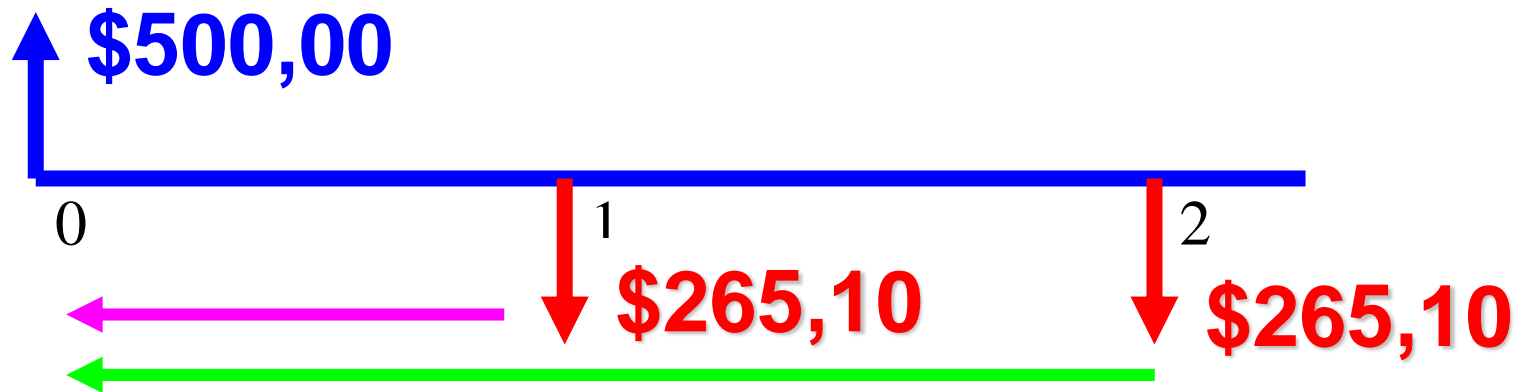
$$VF = 14000 (1+0,03)^1$$

$$VF = \$14.420,00$$

- Uma loja anuncia um produto a vista por \$500,00 ou em duas parcelas mensais, sem entrada, iguais a X . Sabendo que a loja cobra juros **composto**, iguais a 4%, calcule o valor de X .



$i = 4\% \text{ a.m. (JC)}$



Descapitalizando X_1

$$VF = VP (1+i)^n$$

$$VP = VF / (1+i)^n$$

$$VP = X / (1+0,04)^1$$

$$VP = 0,9615.X$$

Descapitalizando X_2

$$VF = VP (1+i)^n$$

$$VP = VF / (1+i)^n$$

$$VP = X / (1+0,04)^2$$

$$VP = 0,9246.X$$

Como a soma a valor presente é igual a \$500,00,

$$500 = 0,9615.X + 0,9246.X = 1,8861.X$$

$$X = 500/1,8861 = \$265,10$$

- Uma empresa comercial, para efetuar o pagamento de suas encomendas, deve dispor de \$15.000,00 daqui a 3 meses e \$20.000,00 daqui a 8 meses. Para tanto, deseja aplicar hoje uma quantia X que lhe permita retirar as quantias necessárias nas datas devidas, ficando sem saldo no final. Se a aplicação for feita a juros compostos, à taxa de 4% ao mês, qual deverá ser o valor de X ?

- **Duas taxas de juros i_1 e i_2 , referidas a períodos diferentes no regime de capitalização ou dos juros compostos são equivalentes quando resultam no mesmo montante, ou juro, no fim do prazo da operação, tendo incidido sobre o mesmo principal.**



Fórmula da equivalência

BRUNI

$$ia = [(1 + ib)^{(nb/na)}] - 1$$



1. Determinar as taxas semestral e anual equivalentes à taxa de juros compostos de 3% ao mês.

Resposta : 19,41% a.s. e 42,58% a.a.

2. Calcular a taxa mensal equivalente de juros de : a) 90% ao semestre; b) 220,8% ao ano; c) 96% ao biênio.

Resposta : a) 11,29% a.m., b) 10,2% a.m., c) 2,84 a.m.



Tabelas

Tabela de fatores $(1+i)^n$

BRUNI

n\i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937

Tabela de fatores $(1+i)^n$

BRUNI

n\i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259	3,9703	4,5950
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000	4,3276	5,0545
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960	4,7171	5,5599
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157	5,1417	6,1159
20	1,2202	1,4859	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610	5,6044	6,7275