

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA  
CAMPUS SÃO JOSÉ

Componente Curricular: Sistema de Comunicação 1

Professor: Mario Noronha Neto

Aluno: João Pedro Menegali Salvan Bitencourt

Turma: 29007

Data: 21/08/2023

## Sinais de Espectro

### Introdução

Nesse documento serão apresentados 3 experimentos realizados na linguagem MATLAB, que demonstram operações que podem ser realizadas com sinais. Será mostrado o processo de composição de um sinal através da soma de senos ou cossenos, o processo de filtragem de modo a obter os sinais originais e a análise de um sinal de ruído.

Para cada experimento, será visualizado o que ocorre no domínio do tempo e da frequência.

### Fundamentação teórica

Um sistema é capaz de obter um sinal de entrada, realizar operações com o mesmo, e gerar uma saída resultante dessas operações. Um sinal pode ser composto de vários sinais distintos. Um exemplo é a onda quadrada, composta pela soma de vários senos ou cossenos.

Um sinal contínuo no tempo pode ser amostrado, tornando-se discreto, o que permite o uso de filtros digitais para separar as componentes de frequência desejadas. Há três tipos básicos de filtro:

- **passa-baixa:** atenua frequências maiores do que a frequência de corte;
- **passa-faixa:** atenua frequências menores do que a frequência de corte inferior e maiores do que a frequência de corte superior;
- **passa-alta:** atenua frequências menores do que a frequência de corte.

Os filtros também podem ser classificados como ideais ou reais. Nos filtros ideais ocorre a atenuação total e imediata das frequências que estão fora da região de corte. Já nos filtros reais, a atenuação não é imediata ou mesmo total, de forma que amplitudes de frequências que estão além da região de corte ainda são visíveis. Para melhorar a filtragem utilizando filtros digitais reais, é possível aumentar a ordem destes, tornando-os mais rígidos de forma que causem maior atenuação nas frequências indesejadas.

A visualização do sinal no domínio da frequência pode ser realizada obtendo a Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD). Programaticamente, utiliza-se a Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform), para obter os espectros de frequência do sinal. No caso de um sinal composto por vários sinais, com o uso da FFT é possível visualizar cada componente de frequência presente. A visualização do espectro de frequência facilita o processo de se projetar de um filtro pois permite observar quão restrito um filtro precisa ser para uma filtragem eficiente. Para este experimento, o cálculo do espectro de frequência dos sinais foi realizado realizando-se a FFT do vetor do sinal e dividindo o resultante pelo comprimento de tal vetor. Em seguida, o aplica-se a função *fftshift*, que causa um deslocamento para que a frequência zero fique centralizada no espectro. Isso permite a visualização das frequências positivas e negativas ao mesmo tempo.

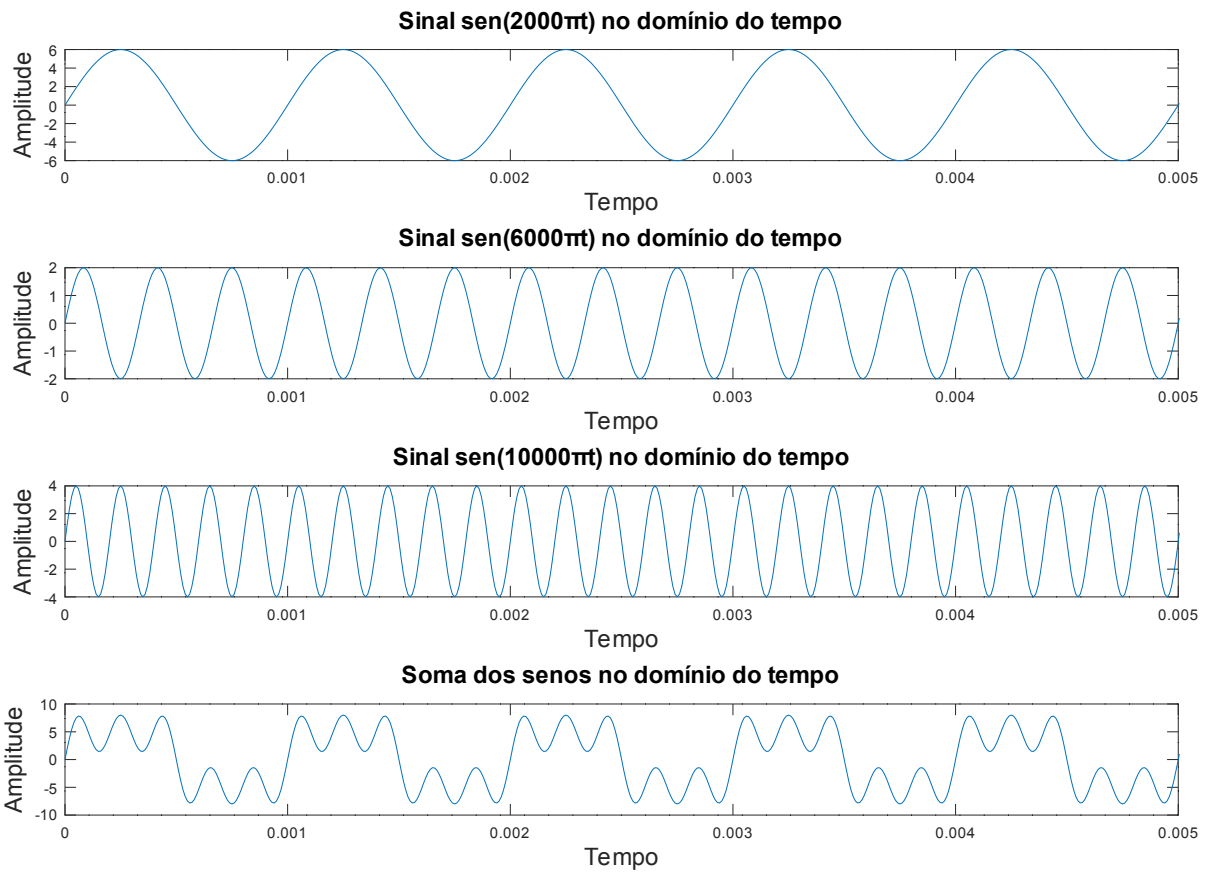
### Gráficos gerados

No **primeiro experimento**, foi gerado um sinal a partir da soma de três sinais senos:

- $s_1(t) = 6\text{sen}(2000\pi t)$ ;
- $s_2(t) = 2\text{sen}(6000\pi t)$ ;
- $s_3(t) = 4\text{sen}(10000\pi t)$ ;

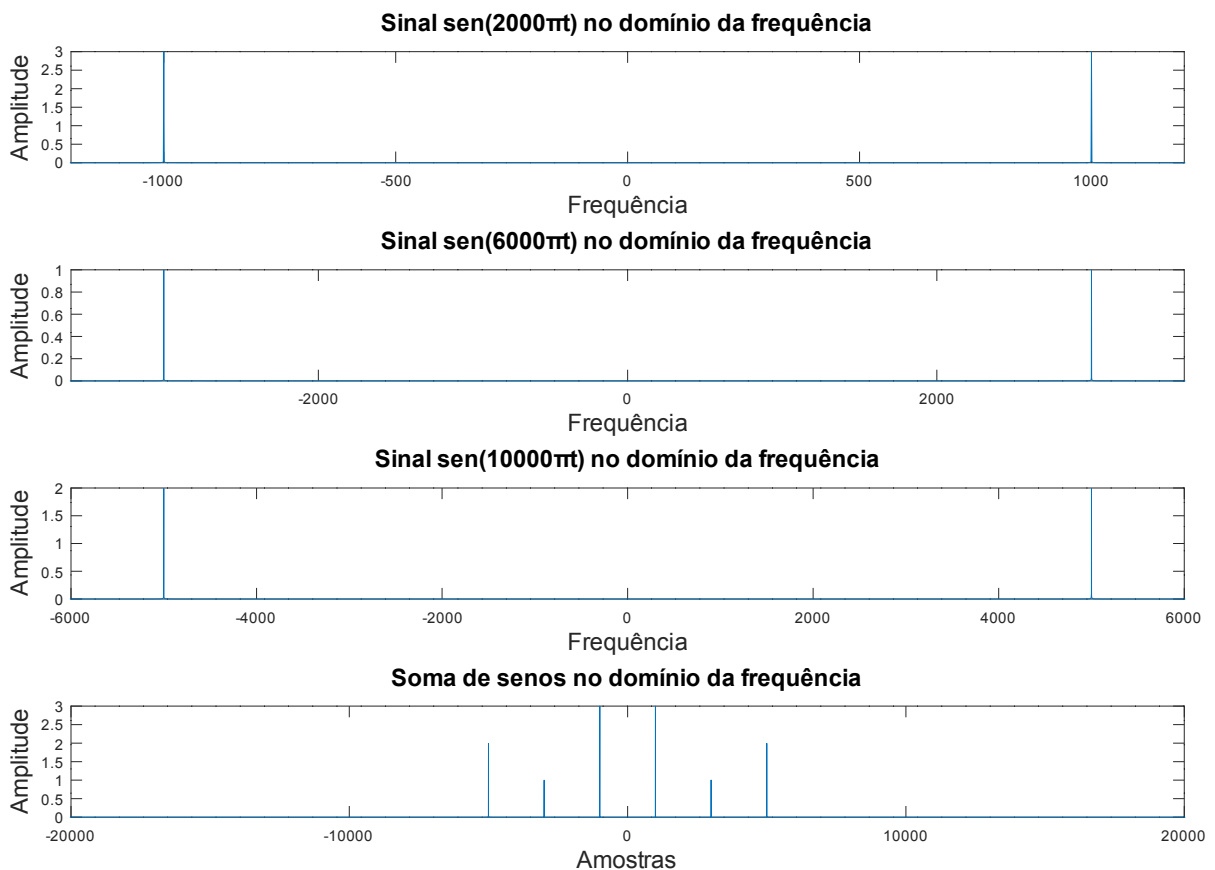
Abaixo, estão ilustrados os três sinais, bem como a soma dos mesmos:

Figura 1: Os três sinais senoidais bem como soma destes, representados no domínio do tempo.



Fonte: Autoria própria.

Figura 2: Representação dos três sinais senoidais e a soma dos mesmos, no domínio da frequência.



Fonte: Autoria própria.

Na Fig. 1 é possível visualizar como fica a soma final dos três sinais fundamentais. A medida que mais harmônicas de senóides são somadas, mais próximo se chega de uma onda quadrada. Os sinais possuem frequências de 1 kHz, 3 kHz e 5 kHz, respectivamente. A soma foi obtida com:

- $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$

A frequência de amostragem utilizada foi de 100 kHz, que é vinte vezes a maior frequência dentre os três sinais, que é de 5 kHz. Isso garante que não haja perda de informação.

Já na Fig. 2, os sinais estão representados no domínio da frequência. Tal representação foi obtida através da FFT. No primeiro gráfico é possível observar os impulsos nas frequências -1000 Hz e 1000 Hz. Já no segundo gráfico os impulsos estão em -3000 Hz e 3000 Hz e no terceiro gráfico os impulsos ocorrem em -5000 Hz e 5000 Hz. No quarto gráfico é possível observar todas as componentes de frequência presentes no sinal. É possível notar que as amplitudes correspondem à metade da amplitude dos sinais originais, já que há duas componentes para cada frequência de sinal.

Outro dado obtido no experimento foi a potência média do sinal  $s(t)$ . Para tal, foi utilizada a função *norm* da seguinte forma:

- $P_{\text{média}} = \text{norm}(s(t))^2 / \text{length}(s(t))$
- $P_{\text{média}} = 27,9997 \text{ W}$

Nesse caso,  $s(t)$  é um vetor e sua norma é como se fosse um valor RMS (valor eficaz). Ao elevar essa norma ao quadrado, obtém-se a energia do sinal. Dividindo essa energia pelo tamanho do vetor, obtém-se a potência do mesmo.

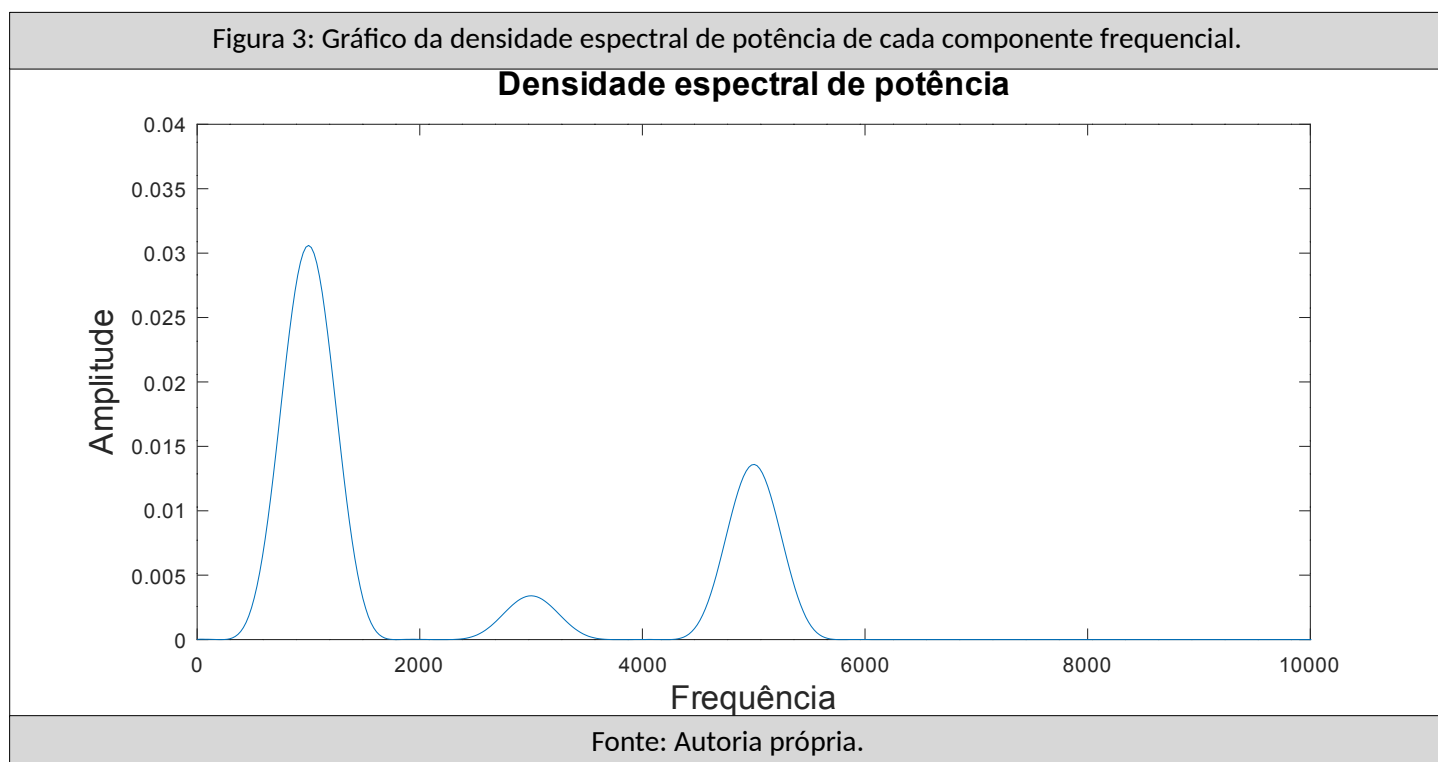
Por fim, foi gerado o gráfico da densidade espectral de potência. Para tal, fez-se o uso da função *pwelch*:

- $[P, \text{freq}] = \text{pwelch}(s\_t, \text{window}, \text{overlap}, \text{nfft}, \text{Fs});$

a qual:

- **s\_t** é o vetor com a soma das senóides;
- **window** é um vetor que especifica a janela de tempo a ser usada para calcular o espectro de potência.
  - Povoado com "window = hann(256)", que gera uma matriz de 256 números, representando uma janela de Hann, e utilizada para janelar o sinal de entrada antes do cálculo da potência, melhorando a visualização final;
- **overlap** é o número de pontos de sobreposição entre as janelas de tempo. O valor é dado em porcentagem e nesse experimento foi atribuído 50%, ou seja, metade dos pontos de cada janela de tempo é sobreposta à janela seguinte.
- **nfft** é o número de pontos para o cálculo da FFT. Quanto maior, mais preciso é o resultado. Para este experimento foi utilizado o valor de 4096;
- **Fs** é a frequência de amostragem que, conforme explicado anteriormente, neste experimento foi assumido o valor de 100 kHz, que é vinte vezes o valor da maior frequência dentre os três sinais.

Abaixo, está a figura que representa a densidade espectral de potência:



Na Fig. 3, é possível visualizar a densidade espectral de potência para as frequências de 1 kHz, 3 kHz e 5 kHz. Os valores obtidos estão normalizados e podem ser calculados da seguinte forma:

- Para o sinal “ $s_1(t) = 6\text{sen}(2000\pi t)$ ”, a amplitude no espectro de frequência é 3, portanto:

$$\frac{3^2}{300} = 0,03$$

- Para o sinal “ $s_2(t) = 2\text{sen}(6000\pi t)$ ”, a amplitude no espectro de frequência é 1, portanto:

$$\frac{1^2}{300} = 0,003333$$

- Para o sinal “ $s_3(t) = 4\text{sen}(10000\pi t)$ ”, a amplitude no espectro de frequência é 2, portanto:

$$\frac{2^2}{300} = 0,013333$$

Em outras palavras, o sinal sofreu uma normalização de fator 300, sendo essa uma característica da implementação da função *pwelch*.

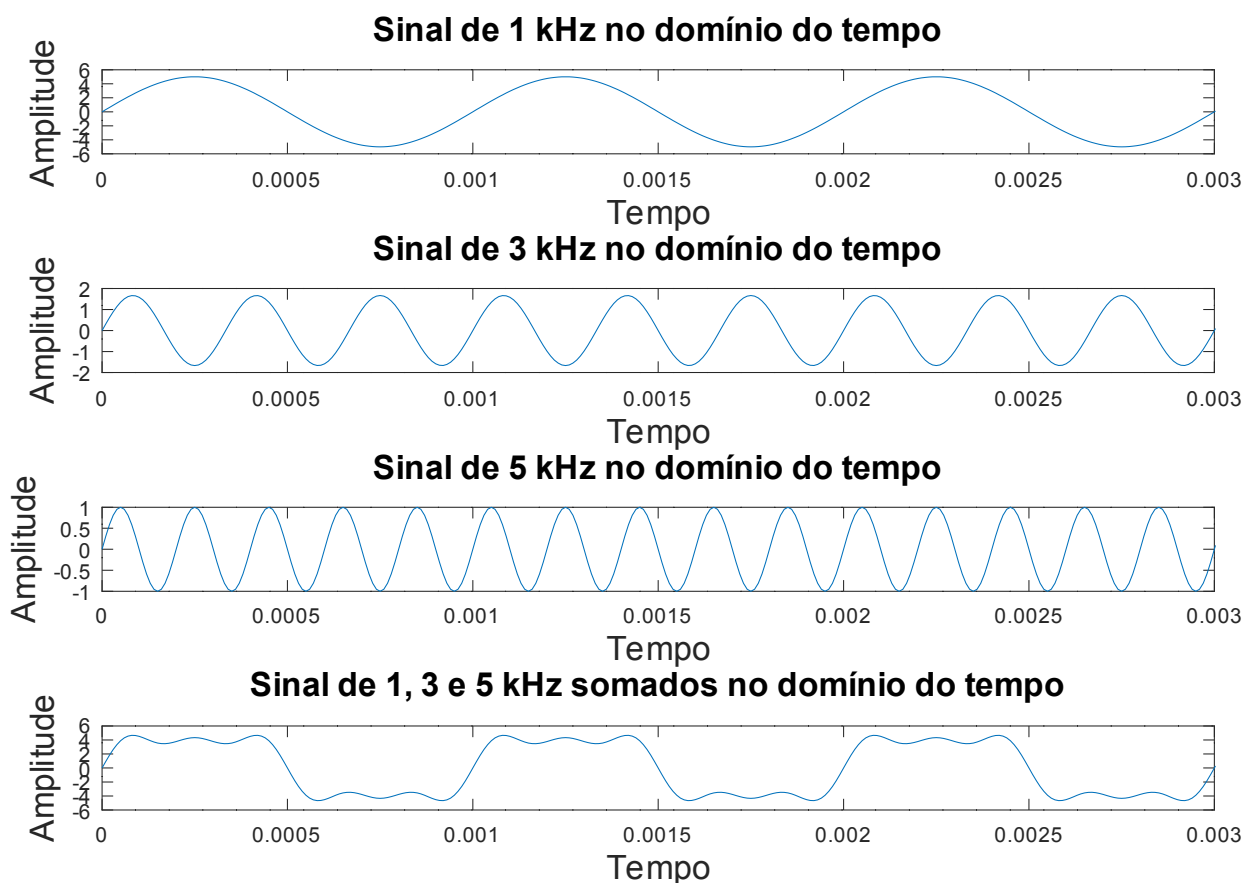
A Densidade Espectral de Potência permite visualizar quanto cada faixa de frequência ocupa de potência no sinal. No caso desse experimento, está de acordo com a amplitude de cada sinal. Dessa forma, é possível afirmar que a componente do sinal “ $s_1(t) = 6\text{sen}(2000\pi t)$ ” possui mais potência que a componente do sinal “ $s_3(t) = 4\text{sen}(10000\pi t)$ ”.

No **segundo experimento**, foi gerado um sinal a partir da soma de três sinais cossenos:

- $s_1(t) = 5\text{cos}(2000\pi t)$ ;
- $s_2(t) = \frac{5}{3}\text{cos}(6000\pi t)$ ;
- $s_3(t) = \text{cos}(10000\pi t)$ ;

Abaixo, estão ilustrados os três sinais, bem como a soma dos mesmos:

Figura 4: Representação dos três sinais senoidais e a soma dos mesmos, no domínio do tempo.

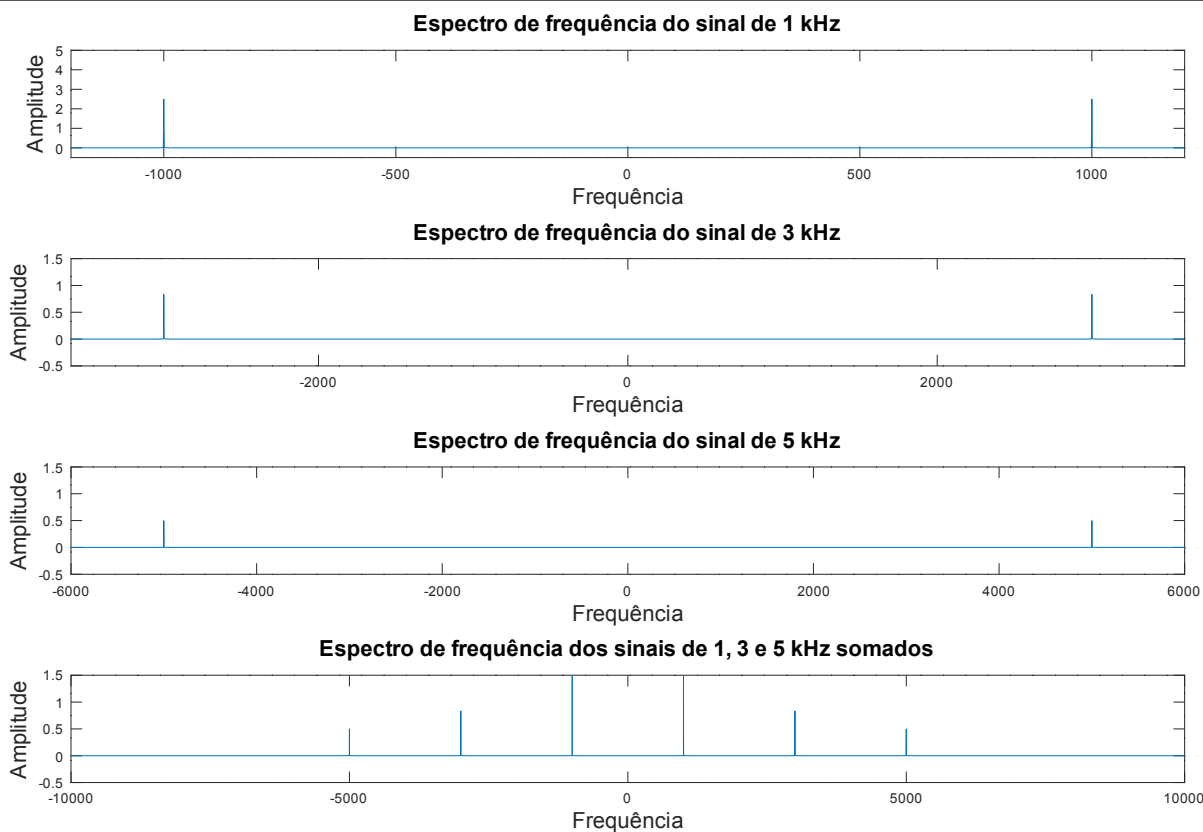


Fonte: Autoria própria.

Na Fig. 4 observa-se a os três sinais cossenoidais, bem como a soma destes, que foi realizado da mesma forma que o experimento 1.

A frequência de amostragem utilizada foi de 100 kHz, a mesma do experimento anterior, já que os três sinais possuem a mesma frequência dos anteriores, porém amplitudes diferentes.

Figura 5: Representação dos três sinais senoidais e a soma dos mesmos, no domínio da frequência.



Fonte: Autoria própria.

No quarto gráfico da Fig. 5 é possível visualizar cada componente frequencial do sinal resultante. Conforme esperado, a componente de 1 kHz é a que possui maior amplitude.

Na terceira etapa do segundo experimento, foram gerados três filtros **ideais**:

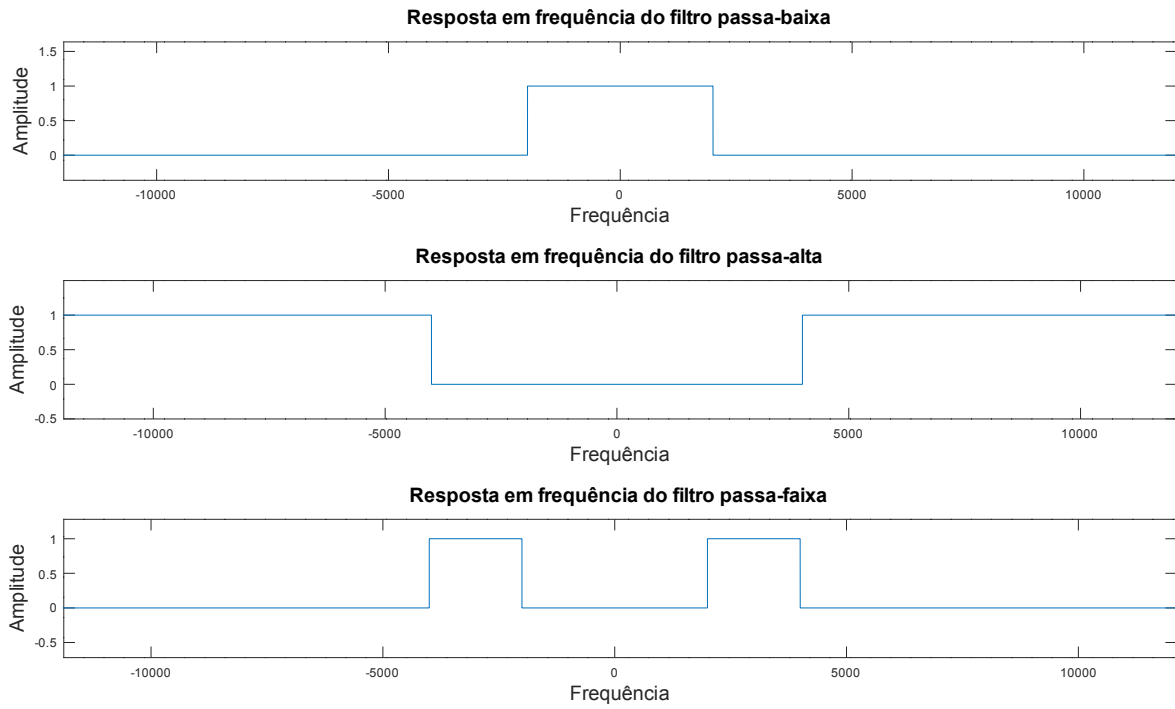
- **Passa baixa**, com frequência de corte de 2 kHz;
- **Passa alta**, com banda de passagem acima de 4 kHz;
- **Passa faixa**, com banda de passagem entre 2 kHz e 4 kHz;

Como o filtro precisa ser ideal, foi criado um vetor para cada filtro, do tamanho da frequência de amostragem ( $F_s$ ) mais 1, totalizando em 100001 amostras. Foram utilizadas as funções “zeros” e “ones” do MATLAB que geram sequências de zeros e uns, respectivamente. Os zeros anulam as amostras e os uns preservam as amostras. Dessa forma, sendo 100001 amostras totais, os filtros ficaram da seguinte forma:

- Passa baixa: [zeros(1,48000) ones(1,4001) zeros(1,48000)]
- Passa alta: [ones(1,46000) zeros(1,8001) ones(1,46000)]
- Passa faixa: [zeros(1,46000) ones(1,2000) zeros(1,4001) ones(1,2000) zeros(1,46000)]

A soma dos valores presentes em cada função precisa resultar em 100001. Vale salientar que cada filtro já é criado diretamente no domínio da frequência. Na figura, à seguir, é mostrado a resposta em frequência de cada filtro:

Figura 6: Resposta em frequência dos filtros ideais.



Fonte: Autoria própria.

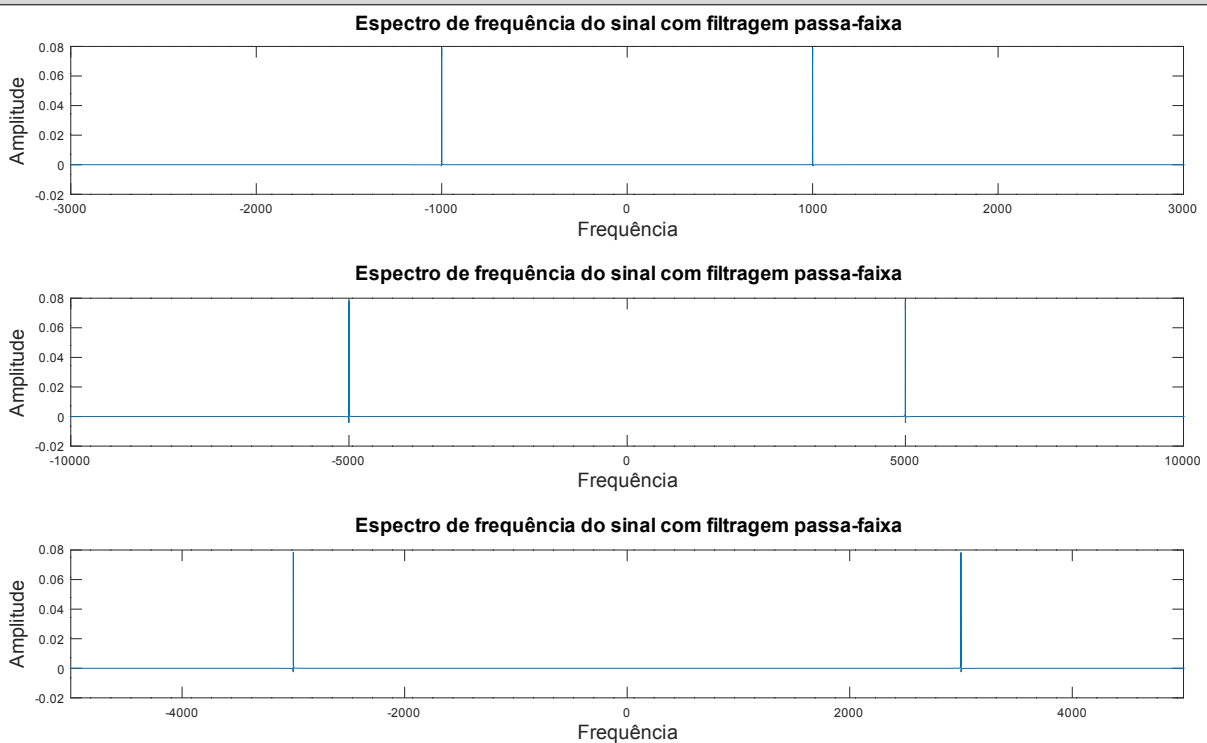
Na Fig. 6 é possível ter uma visualização mais clara das bandas de passagem e de rejeição de cada filtro.

Por fim, o sinal resultante da soma dos cossenos e que está no domínio da frequência, é passado por cada um dos filtros gerados. Para tal, foi realizada a multiplicação ponto por ponto, ou seja, cada amostra do sinal foi multiplicada por cada amostra do filtro. Em código MATLAB, o processo é realizado da seguinte forma:

- `filtragem_PB_f = filtro_PB_f .* S_f;` - Sinal passando pelo filtro passa baixa;
- `filtragem_PA_f = filtro_PA_f .* S_f;` - Sinal passando pelo filtro passa alta;
- `filtragem_PF_f = filtro_PF_f .* S_f;` - Sinal passando pelo filtro passa faixa.

Os sinais resultantes são mostrados a seguir:

Figura 7: Espectro de frequência dos sinais após a filtragem ideal.

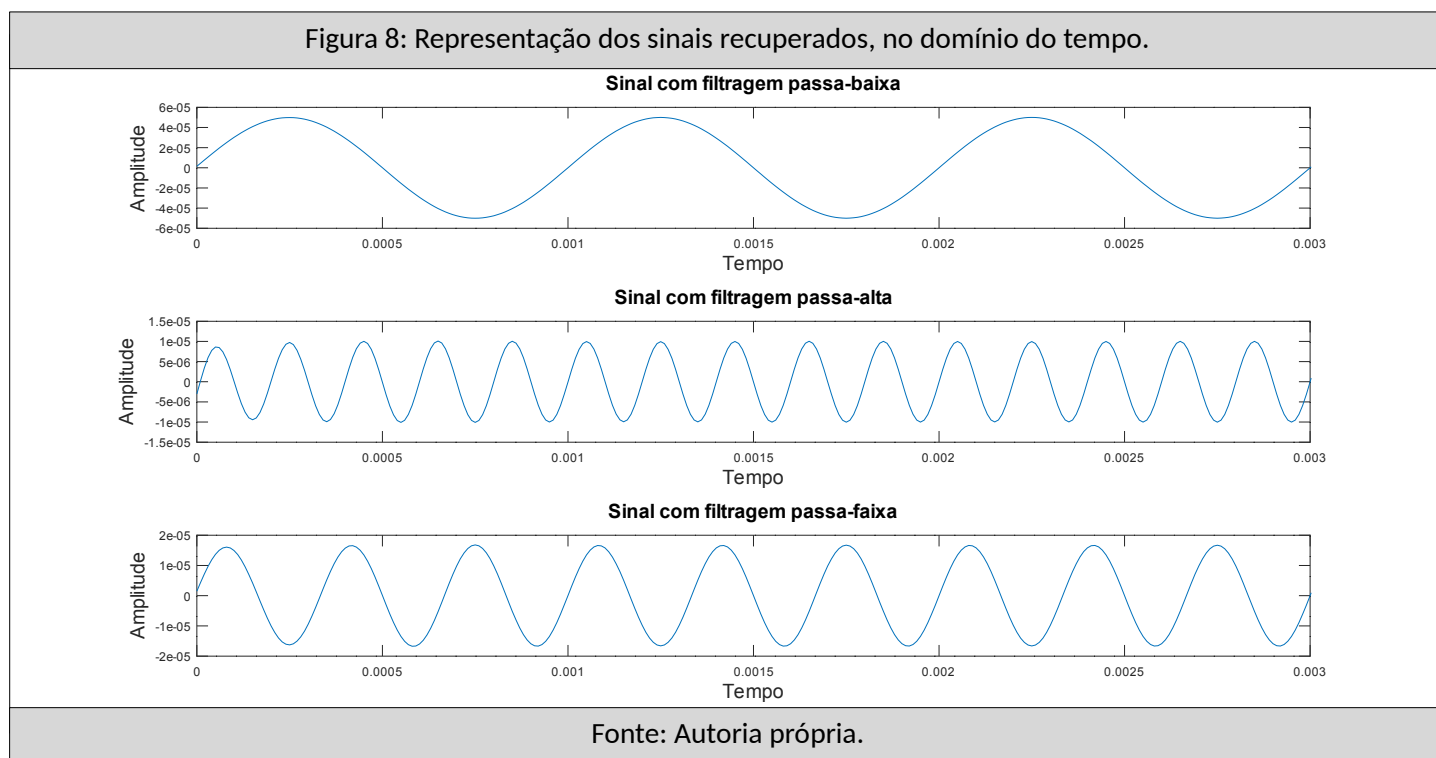


Fonte: Autoria própria.

Após obter os sinais filtrados no domínio da frequência, realiza-se o processo inverso para obter os mesmos no domínio do tempo. Dessa forma, foram realizados os seguintes passos:

- Foi aplicado o deslocamento inverso, utilizando a função “ifftshift”, nos sinais filtrados:
  - `filtragem_PB_f = ifftshift(filtragem_PB_f);`
  - `filtragem_PA_f = ifftshift(filtragem_PA_f);`
  - `filtragem_PF_f = ifftshift(filtragem_PF_f);`
- Em seguida, foi aplicada a transformada rápida inversa de Fourier em cada um dos sinais deslocados:
  - `ifft(filtragem_PB_f);`
  - `ifft(filtragem_PA_f);`
  - `ifft(filtragem_PF_f);`

Dessa forma, foram obtidos os sinais de volta no domínio do tempo, conforme mostrado abaixo:



Na Fig. 8 nota-se que todos os três sinais foram recuperados. Entretanto, nota-se uma leve defasagem. Isso é mais perceptível logo no início do período.

Observando os gráficos das Fig. 8 e Fig. 9, é possível concluir que:

- O filtro passa baixa recuperou o sinal “ $s_1(t) = 5\cos(2000\pi t)$ ”, de 1 kHz, com amplitude de saída de 0,00005;
- O filtro passa alta recuperou o sinal “ $s_3(t) = \cos(10000\pi t)$ ”, de 5 kHz, com amplitude de saída de 0,000001;
- O filtro passa alta recuperou o sinal “ $s_2(t) = \frac{5}{3}\cos(6000\pi t)$ ”, de 3 kHz, com amplitude de saída de 0,0000168;

Outra observação que pode ser realizada é que a amplitude dos sinais de saída são dez mil vezes menor. Essa atenuação ocorreu durante o processo de amostragem inicial e foi levada até o processo de filtragem.

Por fim, no **terceiro experimento**, foram realizadas operações com um sinal de ruído gerado com números aleatórios. Para tal, foi utilizado a função “randn” para gerar um vetor de um segundo de ruído com distribuição normal. A frequência de amostragem é de 10 kHz e o período de amostragem é  $T = 0,0001$  s. O uso da função mencionada dá-se da seguinte forma:

- `ruído = randn(1,10000)`

Utilizando as funções “mean” e “var” é possível obter a média a variância, respectivamente:

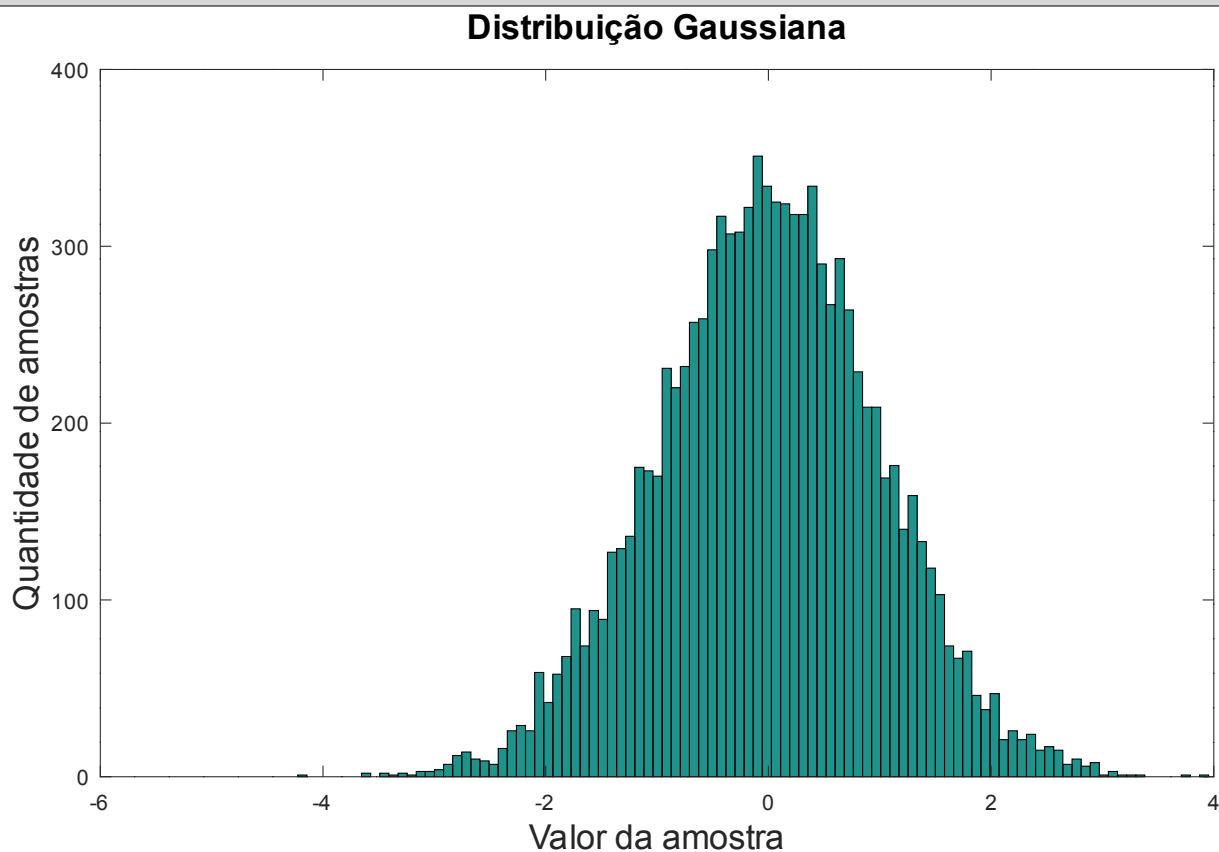
- `media_ruído = mean(ruído) = -0,0034639`
- `variancia_ruído = var(ruído) = 0,9921`

Como a média resultou em um valor bem próximo de zero, é possível concluir que metade dos valores do vetor

são maiores que zero e a outra metade são valores menores que zero, o que indica a distribuição uniforme. Observando a variância, sendo esta um valor próximo a 1, é possível chegar a mesma conclusão que os valores estão distribuídos uniformemente.

Na segunda etapa desse experimento, foi gerado um histograma com a utilização da função “hist”:

Figura 9: Histograma do vetor de ruído.

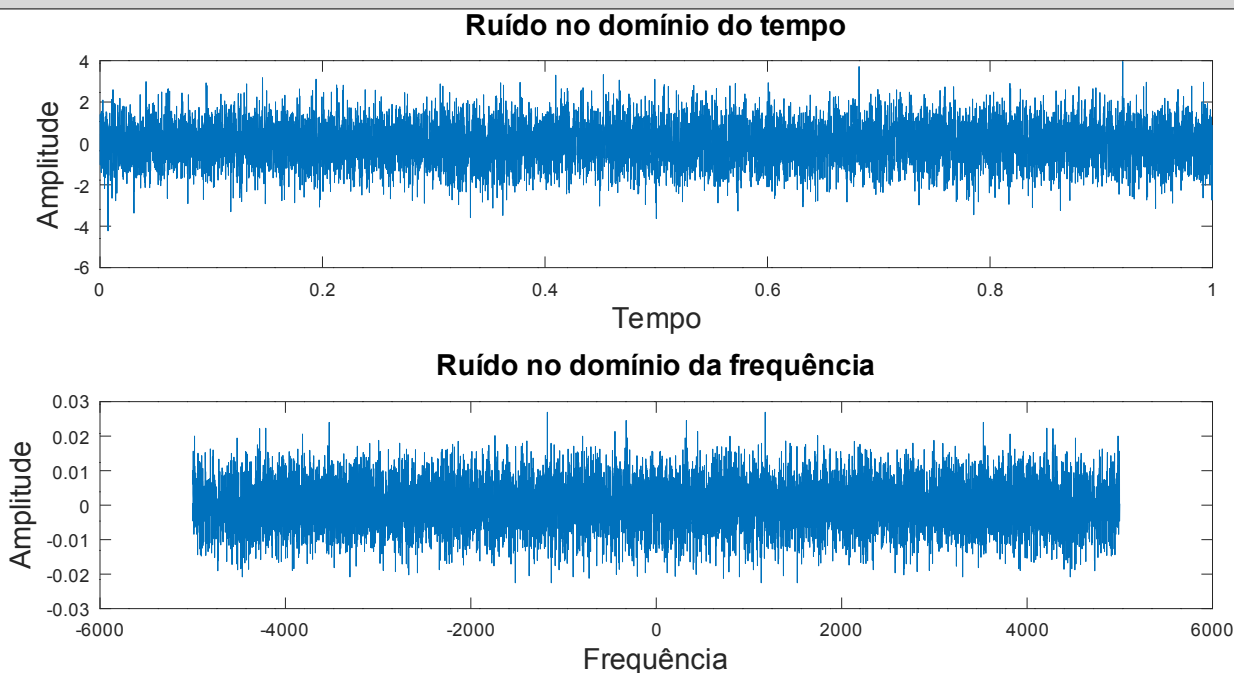


Fonte: Autoria própria.

Conforme analisado pela média e pela variância, as amostras estão quase uniformemente distribuídas. No gráfico da Fig. 9, isso é explicitado pela quantidade de valores próximos do centro em zero.

Na figura a seguir, é mostrado a representação do ruído no domínio do tempo e da frequência:

Figura 10: Representação do ruído nos domínios do tempo e da frequência.

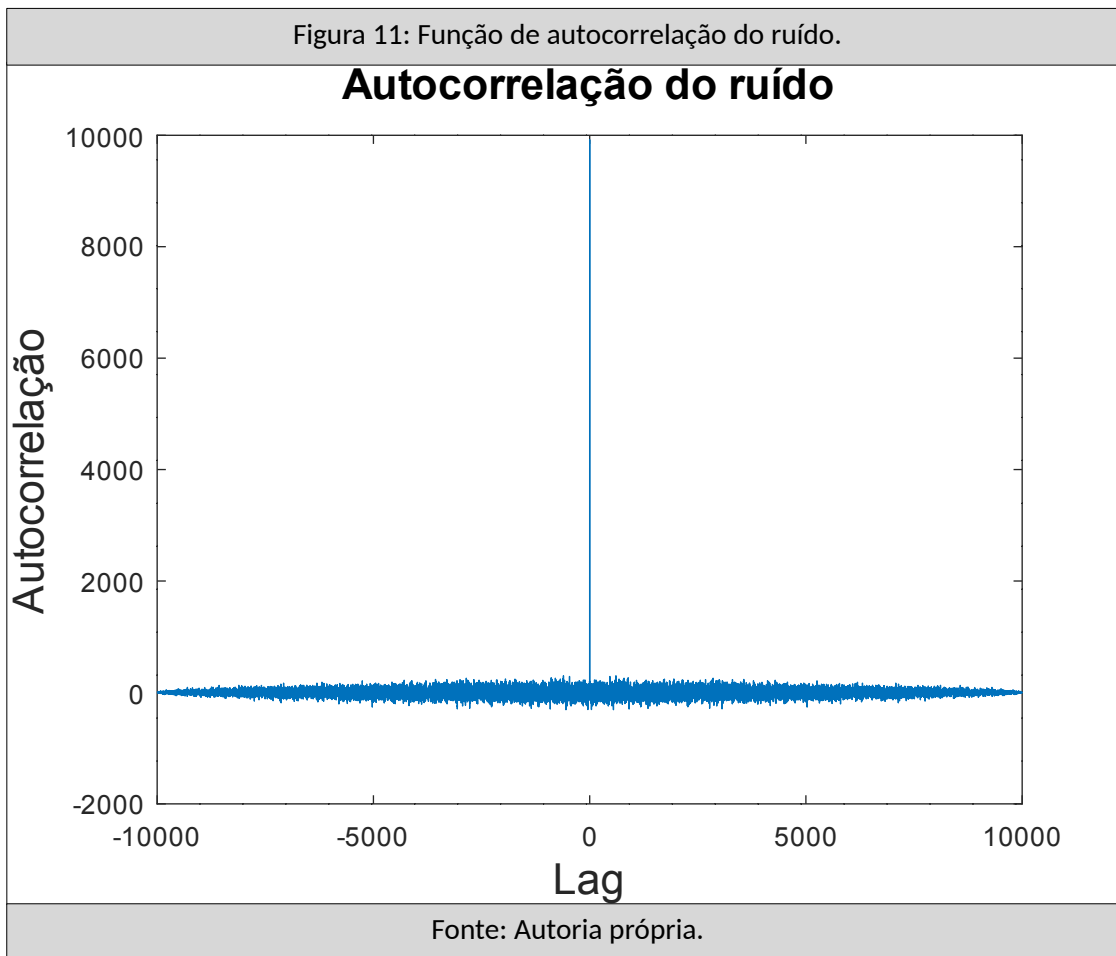


Fonte: Autoria própria.



No primeiro gráfico da Fig. 10, é observado 1 s de ruído. Já no segundo gráfico, é observado que esse ruído está presente na faixa de frequência até 5 kHz.

Na etapa seguinte, foi utilizada a função “xcorr” para gerar o gráfico da função de autocorrelação do ruído:



Na Fig. 11, é observado que a função de autocorrelação é zero em todos os lags, com exceção de lag igual a zero. Isso significa que o sinal é completamente independente de si mesmo em diferentes tempos.

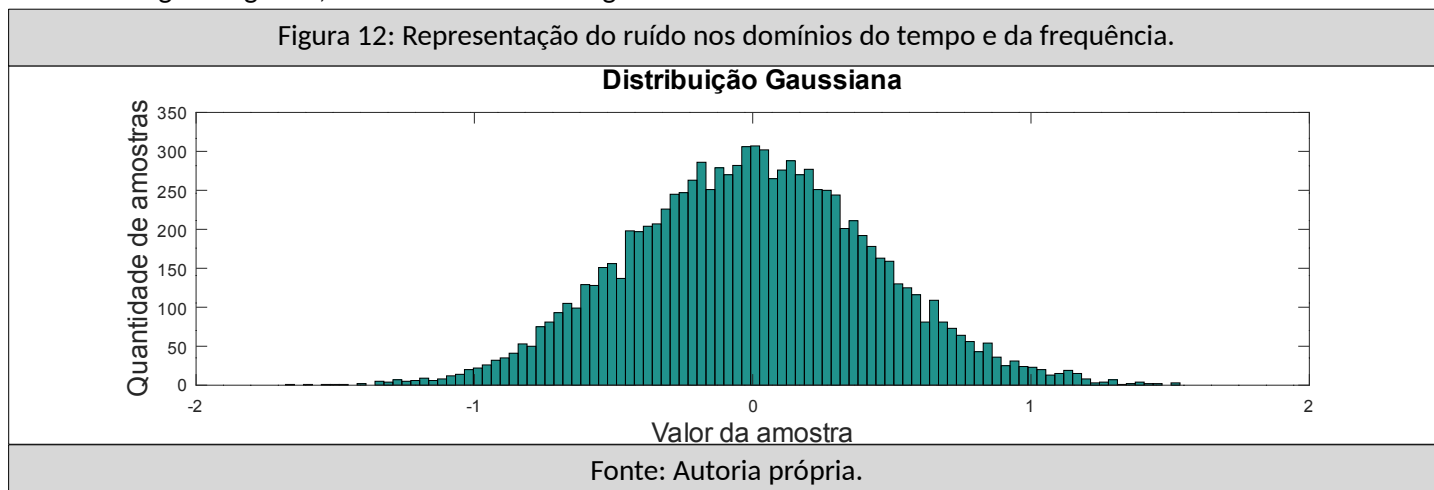
A próxima etapa desse experimento envolveu criar um filtro passa baixa real, utilizando a função “fir1”. O uso deu-se da seguinte forma:

- `filtro = fir1(ordem,(f_cut*2)/Fs)`, o qual:
  - **ordem** é a precisão que o filtro terá. Quanto maior for a ordem, mais restrito será o filtro de forma que atenuar mais intensamente as frequências indesejadas. Nesse experimento, a ordem do filtro foi definida como 50;
  - **f\_cut** é a frequência de corte que, nesse experimento é de 1 kHz;
  - **Fs** é a frequência de amostragem, que nesse experimento é de 10 kHz.

O filtro foi aplicado ao sinal através da função filter:

- `ruído_filtrado = filter(filtro, 1, ruído);`

Na figura seguinte, é demonstrado o histograma desse ruído filtrado:

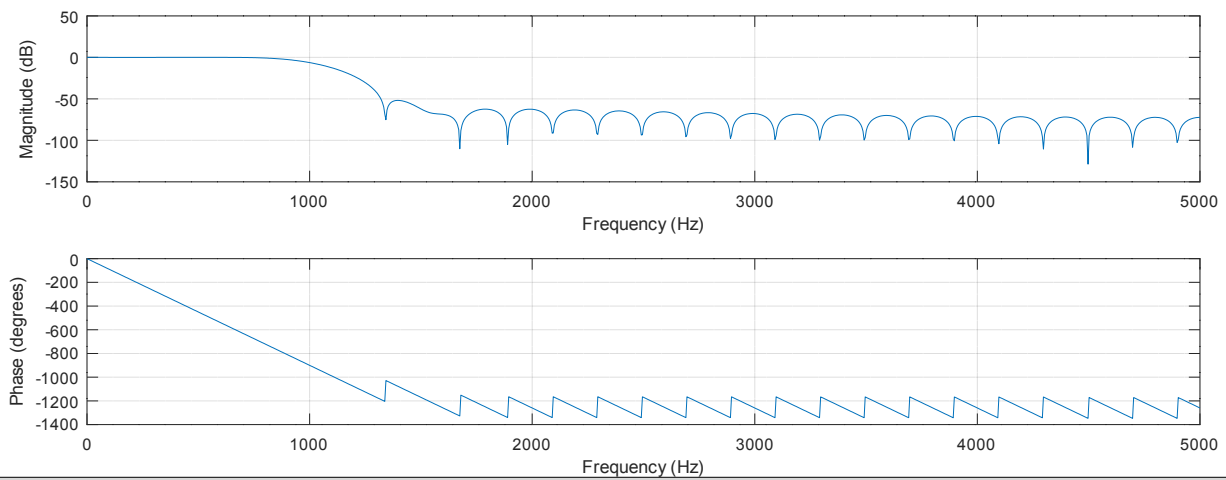


Para visualizar a resposta em frequência do filtro projetado, foi utilizada a função “freqz”:

- `freqz(filtro,1,1024,Fs);`

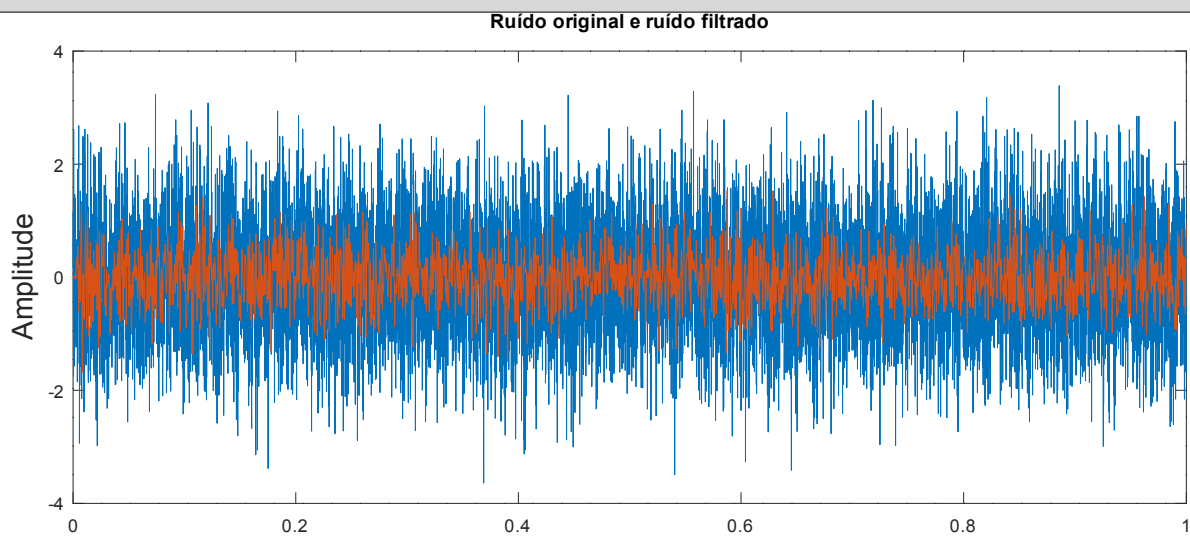
Tal função gerou o seguinte gráfico:

Figura 13: Resposta em frequência e magnitude do filtro.



Fonte: Autoria própria.

Figura 14: Ruído filtrado (vermelho) sobrepondo o ruído original para comparação.



Fonte: Autoria própria.

A Fig. 14 mostra o ruído original e filtrado no domínio do tempo.

## Conclusão

Esses experimentos mostraram diversas operações práticas que podem ser realizadas com filtro digitais. Desde composições de sinais através de somas até a filtragem para obter os sinais originais. Além disso, foi possível visualizar a ação dos filtros passa alta, baixa e faixa ideal.

Além disso, foi possível verificar na prática vários aspectos vistos na disciplina de Sinais e Sistemas.