3

Livro: Introdução à Álgebra Linear
Autores: Abramo Hefez
Cecília de Souza Fernandez

Capítulo 3: Espaços Vetoriais

Sumário

1 Subespaços Vetoriais 58

1.1 Caracterização dos Subespaços Vetoriais 58

1.2 Operações com Subespaços 61

1.3 Subespaços Gerados 63

2 Dependência e Independência Linear 69

3 Bases e Dimensão 75

3.1 Bases 75

3.2 Dimensão 82

4 Espaço Linha de uma Matriz 86

Neste capítulo, desenvolveremos o conceito de espaço vetorial que introduzimos no Capítulo 1. Intimamente associadas à noção de espaço vetorial estão as noções de subespaço vetorial, de base e de dimensão, conceitos esses fundamentais que introduziremos neste capítulo e que nos permitirão entender melhor a estrututa desses espaços. A estrutura de espaço vetorial está presente em espaços importantes da Análise Matemática e da Geometria Diferencial, como os espaços de Banach e os espaços de Hilbert, que possuem muitas aplicações na Física moderna, entre outros.

Neste texto enfatizaremos os espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Apesar do fato de muitos dos resultados que obteremos serem válidos no contexto mais geral dos espaços vetoriais sobre corpos abitrários, nos restringiremos aos espaços vetoriais reais.

1 Subespaços Vetoriais

Na Subseção 1.3 do Capítulo 1, vimos que o conjunto solução S_h de um sistema de equações lineares homogêneo com n incógnitas forma um espaço vetorial contido no espaço $\mathbb{R}^n$. Esta é uma situação típica da noção de subespaço de um espaço vetorial, que definiremos a seguir com maior generalidade.

1.1 Caracterização dos Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Dizemos que W é um *subespaço vetorial* de V, ou simplesmente um *subespaço* de V, se W, com as operações de adição em V e de multiplicação de vetores de V por escalares, é um espaço vetorial.

Para mostrar que um subconjunto não vazio W de V é um subespaço de V é preciso inicialmente verificar se as operações de adição de vetores e de multiplicação de vetores por escalares em V estão definidas em W. Em seguida, seria necessário verificar as propriedades A1–A4 e ME1–ME4 da definição de espaço vetorial que demos na Subseção 1.2 do Capítulo 1. No entanto, como W é parte de V, que já sabemos ser um espaço vetorial, então algumas das propriedades anteriores não precisam ser testadas em W. Por exemplo, não precisamos testar se a adição em W é associativa nem se é comutativa, pois essas propriedades são satisfeitas por todos os elementos de V e, consequentemente, por todos os elementos de W. Pelo mesmo motivo, as condições ME1–ME4 não precisam ser testadas em W. Assim, para mostrar que um subconjunto não vazio W de V é um subespaço de um espaço vetorial V, precisaremos somente verificar se A3 e A4 são satisfeitas. O resultado a seguir mostra que, de fato, basta mostrar que as operações de V estão definidas em W.

Proposição 3.1.1. *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Então, W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;*

(ii) *se $a \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, então $au \in W$.*

Demonstração Se W é um subespaço de V, então claramente as condições (i) e (ii) são verificadas.

Reciprocamente, suponhamos que W possua as propriedades (i) e (ii). Para mostrar que W é subespaço de V, precisamos somente verificar que os elementos de W possuem as propriedades A3 e A4. Tome um elemento qualquer u de W, o que é possível pois $W \neq \emptyset$. Pela condição (ii), $au \in W$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Tomando $a = 0$, segue-se que $0u = 0 \in W$ e, tomando $a = -1$, segue-se que $(-1)u = -u \in W$. ∎

A Proposição 3.1.1 afirma que um subconjunto não vazio de um espaço vetorial V é um subespaço de V se, e somente se, a adição e a multiplicação por escalar são fechadas em W. A Proposição 3.1.1 pode ser reescrita da seguinte forma:

Corolário 3.1.2. *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Temos que W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $u + av \in W$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e para todos $u, v \in W$.*

A demonstração do resultado anterior é deixada para o leitor (veja Problema 1.1). Vejamos agora alguns exemplos de subespaços vetoriais.

Exemplo 1. Seja V um espaço vetorial. Então o conjunto $\{0\}$, constituído apenas do vetor nulo, e também todo o espaço V são subespaços de V. O conjunto $\{0\}$ é chamado de *espaço vetorial nulo*.

Exemplo 2. Seja $V = \mathbb{R}^n$ e sejam $i_1, i_2, \ldots, i_r$ números naturais tais que $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$. O conjunto

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,;\; x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_r} = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Em particular, $W_1 = \{(0, y, z)\,; y, z \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(0, y, 0)\,; y \in \mathbb{R}\}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3. Na Subseção 1.3 do Capítulo 1, vimos que o conjunto solução S_h de um sistema de equações lineares homogêneas em n incógnitas forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Os subespaços do Exemplo 2 podem ser vistos sob esta ótica, pois o subespaço W, do referido exemplo, pode ser descrito como o espaço solução do sistema de equações lineares homogêneas

$$x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_r} = 0.$$

Exemplo 4. No espaço vetorial das matrizes $\mathcal{M}(n, n)$, os conjuntos das matrizes triangulares superiores, triangulares inferiores e das matrizes diagonais, são subespaços vetoriais.

Exemplo 5. No espaço vetorial $\mathcal{S}$ das sequências reais, as recorrências lineares do tipo $\mathcal{R}(a, b)$ (cf. Exemplo 2, Seção 1, Capítulo 1) formam subespaços vetoriais. Mais geralmente, o conjunto $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ das sequências que são soluções da recorrência linear

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_r u_{n-r}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{S}$ (verifique).

1.2 Operações com Subespaços

Como, antes de mais nada, espaços vetoriais são conjuntos, é bastante natural perguntar-se se a união e a interseção de conjuntos preservam a propriedade de espaço vetorial.

Dados $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x - y = 0\}$, subespaços de $\mathbb{R}^2$, o conjunto $U \cup W$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. De fato, temos que $u = (1, 1) \in U \cup W$ e $w = (1, -1) \in U \cup W$, mas $u + w = (2, 0) \notin U \cup W$.

Este exemplo mostra que *a união de dois subespaços de um espaço vetorial V não é necessariamente um subespaço de V*. A próxima proposição mostra que a interseção de subespaços é sempre um subespaço.

Proposição 3.1.3. *A interseção de dois subespaços de um espaço vetorial V é um subespaço de V.*

Demonstração Sejam U e W subespaços de V. Para verificarmos que $U \cap W$ é também um subespaço de V, vamos fazer uso do Corolário 3.1.2 Para isto, primeiramente note que $U \cap W$ é um subconjunto não vazio de V, pois $0 \in U$ e $0 \in W$, já que ambos U e W são subespaços de V. Agora, tomemos $a \in \mathbb{R}$ e $u, v \in U \cap W$. Como $u, v \in U$ e $u, v \in W$, segue do Corolário 3.1.2 que $u + av \in U$ e $u + av \in W$, ou seja, $u + av \in U \cap W$. Novamente, pelo Corolário 3.1.2, segue que $U \cap W$ é um subespaço de V.■

Observemos que o principal problema quando consideramos a união de subespaços é que se tomamos um vetor em cada subespaço, a soma deles pode não pertencer à união. Seria, então, natural considerarmos o conjunto soma definido a seguir.

Dados U e W subespaços de um espaço vetorial V, definimos a *soma* de U e W, denotada por $U + W$, como o conjunto

$$U + W = \{u + w ; \ u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

Com isto, quando somamos um elemento de um subespaço com um elemento do outro, automaticamente, a soma destes elementos está na soma dos subespaços.

Como exemplo, consideremos $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x - y = 0\}$. Temos que $U + W = \mathbb{R}^2$, e, consequentemente, $U + W$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. De fato, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ então

$$(x, y) = \left(\frac{x - y}{2}, \frac{y - x}{2}\right) + \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2}\right),$$

o que mostra que todo elemento de $\mathbb{R}^2$ se escreve como a soma de um elemento de U e um elemento de W. Este exemplo ilustra o resultado a seguir.

Proposição 3.1.4. *A soma de dois subespaços U e W de um espaço vetorial V é um subespaço de V. Este é o menor subespaço de V que contém cada um dos subespaços, no sentido que se um subespaço vetorial L de V é tal que $U \subset L$ e $W \subset L$, então $U + W \subset L$.*

Demonstração Sejam U e W subespaços de V. Tomemos $a \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in U + W$. Como $v_1, v_2 \in U + W$, existem u_1 e u_2 elementos de U e existem w_1 e w_2 elementos de W tais que

$$v_1 = u_1 + w_1 \quad \text{e} \quad v_2 = u_2 + w_2\,.$$

Então,

$$v_1 + av_2 = (u_1 + w_1) + a(u_2 + w_2) = (u_1 + au_2) + (w_1 + aw_2) \in U + W.$$

Assim, provamos que $U + W$ é um subespaço de V.

Para mostrar que $U + W$ é o menor subespaço vetorial de V que contém U e W, seja L um subespaço de V que contém U e W. Para todos $u \in U$ e $w \in W$, temos que $u, w \in L$, logo $u + w \in L$. Isto mostra que $U + W \subset L$. ■

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. O espaço vetorial V é dito ser a *soma direta* de U e W, e representado por $V = U \oplus W$, se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

Como exemplo de uma soma direta, consideremos novamente os subespaços $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x - y = 0\}$. Vimos anteriormente que $\mathbb{R}^2 = U + W$. Como $U \cap W = \{0\}$, segue que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

O próximo resultado mostra uma importante propriedade das somas diretas.

Teorema 3.1.5. *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. Temos que $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo vetor v em V se escreve de modo único como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração Suponhamos $V = U \oplus W$. Tomemos $v \in V$. Como $V = U + W$, pela definição de soma de subespaços, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que

$$v = u + w.$$

Vejamos que a decomposição acima é única no sentido de que se

$$v = u' + w',$$

com $u' \in U$ e $w' \in W$, então $u = u'$ e $w = w'$. Ora, como $v = u + w$ e $v = u' + w'$, então

$$u - u' = -(w - w').$$

Como o lado esquerdo pertence a U e o lado direito a W, da igualdade anterior decorre que $u - u' \in U \cap W$ e $w - w' \in U \cap W$. Como $U \cap W = \{0\}$, segue então que $u = u'$ e $w = w'$. Reciprocamente, suponhamos que todo vetor de V se escreve de modo único como a soma de um vetor de U e de um vetor de W. Claramente, então, $V = U + W$. Se $U \cap W \neq \{0\}$, existiria um vetor não nulo v em $U \cap W$. Como $v \in W$ e W é um subespaço, então $-v \in W$ também. Consequentemente, teríamos $0 = 0 + 0$, com $0 \in U$ e $0 \in W$, e $0 = v + (-v)$, com $v \in U$ e $-v \in W$. Como $v \neq 0$, teríamos duas escritas distintas para um mesmo vetor de V. Como isto não ocorre, temos de fato que $U \cap W = \{0\}$. ■

1.3 Subespaços Gerados

Seja V um espaço vetorial e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vetores de V. Diremos que um vetor v de V é uma *combinação linear* de $v_1, v_2, \ldots, v_r$ se existirem números reais $a_1, a_2, \ldots, a_r$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r\,. \tag{1}$$

Por exemplo, o vetor $(1,6,0)$ em $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1,2,0)$ e $v_2 = (-1,2,0)$, já que $v = 2v_1 + 1v_2$. De fato, a equação

$$(1,6,0) = a_1(1,2,0) + a_2(-1,2,0)$$

equivale ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ 2a_1 + 2a_2 = 6 \end{cases},$$

cuja solução é única e dada por $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$. Já o vetor $w = (2,-2,6)$ não é uma combinação linear de v_1 e v_2, pois não existem números reais a_1 e a_2 tais que $w = a_1v_1 + a_2v_2$. Com efeito, a equação

$$(2,-2,6) = a_1(1,2,0) + a_2(-1,2,0)$$

equivale ao sistema de equações lineares

$$a_1 - a_2 = 2, \quad 2a_1 + 2a_2 = -2, \quad 0a_1 + 0a_2 = 6\ ,$$

mostrando que o sistema é impossível.

Se $r = 1$ em (1), então $v = a_1v_1$, ou seja, v é uma combinação linear de um único vetor v_1 se for um múltiplo por escalar de v_1.

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vetores de um espaço vetorial V. Consideremos o conjunto W de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_r$. O resultado a seguir mostra que W é um subespaço de V. Este subespaço é chamado o *subespaço gerado por* $v_1, v_2, \ldots, v_r$ e dizemos que $v_1, v_2, \ldots, v_r$ *geram* W ou que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é um *conjunto gerador* de W. Para indicarmos que W é o espaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_r$, escrevemos

$$W = G(v_1, v_2, \ldots, v_r).$$

Por exemplo, $G((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$.

Proposição 3.1.6. *Seja $W = G(v_1, v_2, \ldots, v_r)$, onde $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são vetores de um espaço vetorial V. Valem as seguintes afirmações:*

(i) *W é um subespaço de V;*

(ii) *W é o menor subespaço de V contendo*

$v_1, v_2. \dots, v_r$, no sentido de que qualquer subespaço de V que contém $v_1, v_2, \dots, v_r$ também contém W.

Demonstração (i): Tomemos $a \in \mathbb{R}$ e $u, v \in W$. Então existem números reais $a_1, a_2, \dots, a_r$ e $b_1, b_2, \dots, b_r$ tais que

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r,$$
$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_rv_r\,.$$

Portanto, $u + av = (a_1 + ab_1)v_1 + (a_2 + ab_2)v_2 + \cdots + (a_r + ab_r)v_r$. Assim, $u+av$ é uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_r$ e consequentemente pertence a W. Pelo Corolário 3.1.2, W é um subespaço de V.

(ii): Cada vetor v_i é uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_r$, pois podemos escrever

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_r\,.$$

Isto mostra que o subespaço W contém cada um dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_r$. Seja W' um subespaço qualquer de V contendo $v_1, v_2, \dots, v_r$. Pelo Corolário 3.1.2, esse subespaço contém todas as combinações lineares destes vetores. Assim, $W \subset W'$. ■

Exemplo 6. O espaço gerado pelo vetor $v = (1, 1, 2)$ em $\mathbb{R}^3$ é o conjunto $W = \{a(1, 1, 2)\,;\ a \in \mathbb{R}\}$, já que uma combinação linear de v é um múltiplo escalar de v.

Dizemos que um vetor $w = av$ é uma *dilatação*, uma *contração*, ou uma *inversão*, de v, se $a \geq 1$, $0 \leq a < 1$, ou $a < 0$, respectivamente.

Assim, um elemento do subespaço W, acima, é uma dilatação, uma contração ou uma inversão de v (veja Figura 1).

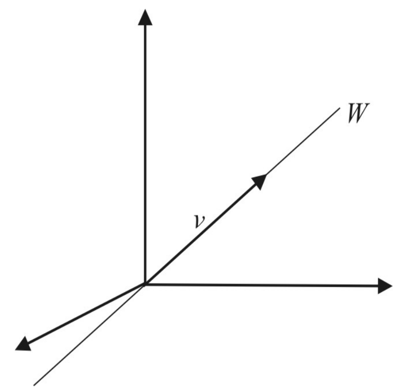

Figura 1

Exemplo 7. Vamos encontrar o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -2, -1)$ e $v_2 = (2, 1, 1)$. Seja $W = G(v_1, v_2)$. Tomemos $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que $v \in W$ se, e somente se, existem números reais a_1 e a_2 tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \,,$$

ou, equivalentemente, se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -2a_1 + a_2 = y \\ -a_1 + a_2 = z \end{cases} \tag{2}$$

tem solução. A matriz ampliada do sistema (2) é equivalente à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & (x+z)/3 \\ 0 & 0 & (x+3y-5z)/3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, (2) tem solução se, e somente se, $x + 3y - 5z = 0$. Assim, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ x + 3y - 5z = 0\}$.

Para gerarmos um mesmo espaço, podemos usar conjuntos geradores distintos. Por exemplo, se considerarmos um vetor não nulo w qualquer em W no Exemplo 6 temos que $G(v) = G(w)$. A seguinte proposição, cuja demonstração é deixada como exercício ao leitor (ver Problema 1.14), nos dá uma condição necessária e suficiente para que conjuntos distintos de vetores gerem um mesmo espaço.

Proposição 3.1.7. *Sejam* $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *e* $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ *dois conjuntos de vetores em um espaço vetorial* V. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $G(v_1, v_2, \ldots, v_r) = G(w_1, w_2, \ldots, w_m)$;

(b) *cada vetor em* α *é uma combinação linear dos vetores de* β *e cada vetor em* β *é uma combinação linear dos vetores de* α.

Seja W um subespaço de um espaço vetorial V. Dar um conjunto de geradores $w_1, \ldots, w_r$ de W é o mesmo que dar uma "parametrização" para o espaço W. De fato, considerando a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^r & \to & V \\ & (a_1, \ldots, a_r) & \mapsto & a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r \end{array}$$

temos que W coincide com a imagem de φ.

Problemas

1.1* Demonstre o Corolário 3.1.2.

1.2 Verifique, em cada caso, se o conjunto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$:

(a) $W = \{(x, y)\,;\ x + y = 0\}$;
(b) $W = \{(x, y)\,;\ x + y = 1\}$;
(c) $W = \{(x, y)\,;\ x^2 = y\}$;
(d) $W = \{(x, y)\,;\ -x + 3y = 0\}$.

1.3 Verifique, em cada caso, se o conjunto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:

(a) $W = \{(x, y, z)\,;\ x = 0\}$;
(b) $W = \{(x, y, z)\,;\ x + y + z \geq 0\}$;
(c) $W = \{(x, y, z)\,;\ z = 3x - 2y\}$;
(d) $W = \{(x, 2x, x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$;
(e) $W = \{(4x, y, y - x)\,;\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

1.4 Verifique, em cada caso, se o conjunto W é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}(3,3)$:
(a) $W = \{[a_{ij}]\,;\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$;
(b) $W = \{[a_{ij}]\,;\ a_{ij} = a_{ji}$ para todo $1 \leq i, j \leq 3\}$;
(c) $W = \{[a_{ij}]\,;\ a_{ij} = 0$ se $i \neq j\}$;
(d) $W = \{A\,;\ A^2 = A\}$;
(e) $W = \{A\,; A$ é invertível$\}$.

1.5 Verifique, em cada caso, se o conjunto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}[x]$:
(a) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2\,;\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$;
(b) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2\,;\ a = c = 0\}$;
(c) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2\,;\ c = a + b\}$;
(d) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2\,;\ c \geq 0\}$.

1.6 Determine, em cada caso, $V \cap W$ e $V + W$:
(a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x = y\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x = y = z\}$;
(b) $V=\{[a_{ij}]_{2\times 2}\,;\ a_{11}=a_{22}$ e $a_{12}=a_{21}\}$ e $W=\{[a_{ij}]_{2\times 2}\,;\ a_{11}=a_{21}$ e $a_{12}=a_{22}\}$;
(c) $V = \{(x, y, -x - 3y)\,;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, 0, z)\,;\ z \in \mathbb{R}\}$;
(d) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\,;\ x + 2y - w = 0\}$ e $W = \{(x, x, x, x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$;
(e) $V = \{(x, x, x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, 0, z)\,;\ z \in \mathbb{R}\}$.

Quais das somas anteriores são somas diretas?

1.7 Seja $V = \mathcal{M}(3,3)$. Sejam U e W os subespaços de V das matrizes triangulares superiores e inferiores, respectivamente. Mostre que $V \neq U \oplus W$. Construa subespaços U' e W' de V tais que $V = U \oplus W'$ e $V = U' \oplus W$.

1.8 Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. Mostre que:
(a) U e W estão ambos contidos em $U + W$;
(b) $U \cap W$ é o maior subespaço contido em U e em W;
(c) $W + W = W$.

1.9 Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. Prove que:
(a) $U \cup W$ é subespaço vetorial se, e somente se, $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$;
(b) $U + W = U \cup W$ se, e somente se, $U = W$.

1.10 Sejam U_1, U_2, W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V de modo que $V = U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$. Se $U_1 \subset U_2$ e $W_1 \subset W_2$, prove que $U_1 = U_2$ e $W_1 = W_2$.

1.11* Determine uma condição que a, b e c devem satisfazer de modo que (a, b, c) seja uma combinação linear de $u = (2, -6, 4)$ e $v = (2, -1, 1)$.

1.12* Considere o conjunto $\alpha = \{(-1, 3, 1), (1, -2, 4)\}$ e determine:
(a) o espaço gerado por α;
(b) o valor de $k \in \mathbb{R}$ para que $v = (5, k, 11)$ pertença ao espaço gerado por α.

1.13 Encontre um conjunto de geradores para cada espaço abaixo:
(a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x - 2y + 3z = 0\}$;
(b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\ x - y = 0 \text{ e } x + t = 0\}$;
(c) $V = \{p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}[x]_2\,;\ a - \dfrac{b}{2} = c\}$;
(d) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2, 2)\,;\ a + c = d \text{ e } b = 0 \right\}$.

1.14 Prove a Proposição 3.1.7.

1.15 Quais dos seguintes vetores
(a) $(0, 2, 2, 2)$, (b) $(1, 4, 5, 2)$, (c) $(0, 0, 0, 0)$, (d) $(0, 3, 1, 5)$
são combinações lineares de $u = (0, 0, 2, -2)$ e $v = (0, 1, 3, -1)$?

1.16 Expresse os seguintes polinômios
(a) $2 + 5x$, (b) $-x + 2x^2$, (c) $3 + 3x + 5x^2$
como combinação linear de

$$p_1(x) = 2 + x + 4x^2, \quad p_2(x) = 1 - x + 3x^2, \quad p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2.$$

2 Dependência e Independência Linear

Vimos na seção anterior, que um conjunto finito de vetores α gera um dado espaço vetorial V se cada vetor em V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de α. Em geral, pode haver mais de uma maneira de expressar um vetor em V como uma combinação linear de vetores de um conjunto gerador. Por exemplo, $\mathbb{R}^3 = G(v_1, v_2, v_3, v_4)$, onde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 1)$. Note que

$$(4, 2, 1) = 1v_1 + 2v_2 - 1v_3 + 1v_4$$

e também que

$$(4, 2, 1) = -1v_1 + 2v_2 + 0v_3 + 2v_4\,.$$

Observamos nesse ponto que é possível trabalhar com conjuntos arbitrários (infinitos) de geradores, mas não o faremos aqui, pois necessitaríamos introduzir novas ferramentas mais sofisticadas, como o Lema de Zorn, ou o Axioma da Escolha (cf. [1]).

Nesta seção, estudaremos condições sob as quais cada vetor de V pode ser escrito de uma única maneira como combinação linear dos elementos de um conjunto gerador. Na próxima seção veremos que conjuntos geradores com esta propriedade desempenham um papel fundamental no estudo dos espaços vetoriais.

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vetores em um espaço vetorial V. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são *linearmente independentes*, ou simplesmente *independentes*, se a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r = 0$$

é satisfeita somente quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. Caso exista algum $a_i \neq 0$, dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são *linearmente dependentes*, ou simplesmente *dependentes*. O conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é dito ser *independente* ou *dependente* se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são independentes ou dependentes, respectivamente.

Observemos que se um dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ é o vetor nulo, digamos $v_1 = 0$, então os vetores são dependentes, pois

$$1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_r = 1 \cdot 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

e o coeficiente de v_1 não é 0. Por outro lado, qualquer vetor não nulo v é, por si só, independente, pois se $av = 0$, então $a = 0$. A seguir, apresentamos outros exemplos de vetores independentes e dependentes.

Exemplo 1. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são independentes, pois a equação

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 a_3 = 0,$$

equivalente à equação

$$a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

é satisfeita somente se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Exemplo 2. Vamos verificar se os vetores $v_1 = (1, -3, 4)$, $v_2 = (3, 2, 1)$ e $v_3 = (1, -1, 2)$ são independentes ou dependentes.

A equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

é dada por

$$a_1(1, -3, 4) + a_2(3, 2, 1) + a_3(1, -1, 2) = (0, 0, 0)$$

ou, equivalentemente, é dada pelo sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \\ -3a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ 4a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \quad . \tag{1}$$

Assim, os vetores v_1, v_2 e v_3 são independentes, se o sistema em (1) tiver somente a solução trivial; ou são dependentes, se o sistema tiver uma solução não trivial. Mas, o sistema em (1) tem somente a solução trivial se, e somente se, a matriz dos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

é invertível (cf. Corolário 2.2.7). Como a matriz é equivalente por linhas à matriz (justifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

concluímos que v_1, v_2 e v_3 são linearmente dependentes.

A solução do exemplo anterior motiva o próximo resultado, que nos oferece um método para verificar se n vetores de $\mathbb{R}^n$ são linearmente independentes ou dependentes. A demonstração é deixada ao cargo do leitor (veja Problema 2.8).

Proposição 3.2.1. *Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores em $\mathbb{R}^n$, onde, para cada i, com $1 \leq i \leq n$, temos $v_i=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Seja $A = [a_{ij}]$. Temos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente se, e somente se, A é invertível.*

E caso tenhamos $n+1$ vetores em $\mathbb{R}^n$? O próximo teorema mostra que *um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^n$ pode conter no máximo n vetores.*

Teorema 3.2.2. *Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Se $r > n$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são linearmente dependentes.*

Demonstração Suponhamos que, para cada $1 \leq i \leq r$, $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. Consideremos a equação

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0.$$

Esta equação é equivalente ao sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{r1}k_r = 0 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{r2}k_r = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \cdots + a_{rn}k_r = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

O sistema dado em (2) é um sistema linear homogêneo de n equações nas r incógnitas $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Como $r > n$, segue do Corolário 2.2.7 que o sistema tem soluções não triviais. Isto mostra que $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são dependentes. ■

O termo "linearmente dependente" sugere que os vetores de alguma maneira dependem uns dos outros. O próximo resultado mostra que isto realmente ocorre.

Teorema 3.2.3. *Um conjunto finito α com dois ou mais vetores de um espaço vetorial V é linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de α pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores.*

Demonstração Seja $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ um subconjunto de um espaço vetorial V. Se α é linearmente dependente, então existem números reais $a_1, a_2, \ldots, a_r$, não todos nulos, tais que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r = 0$. Suponhamos que $a_j \neq 0$. Então

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}\,v_1 - \cdots - \frac{a_{j-1}}{a_j}\,v_{j-1} - \frac{a_{j+1}}{a_j}\,v_{j+1} - \cdots - \frac{a_r}{a_j}\,v_r\,,$$

mostrando que v_j é uma combinação linear dos demais vetores de α. Suponhamos agora que α tem a propriedade de que um de seus vetores, digamos v_i, pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de α. Ou seja, que existem números reais $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_r$ tais que

$$v_i = b_1v_1 + \cdots + b_{i-1}v_{i-1} + b_{i+1}v_{i+1} + \cdots + b_rv_r\,.$$

A equação anterior equivale a

$$b_1v_1 + \cdots + b_{i-1}v_{i-1} - 1v_i + b_{i+1}v_{i+1} + \cdots + b_rv_r = 0. \tag{3}$$

Como o coeficiente de v_i na equação (3) não é 0, segue que α é linearmente dependente. ■

Do resultado acima, segue imediatamente que *um conjunto finito α com dois ou mais vetores de um espaço vetorial V é linearmente independente se, e somente se, nenhum dos vetores de α pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores.*

Por exemplo, nenhum dos vetores dados no Exemplo 1 pode ser escrito como uma combinação linear dos demais. Já, no Exemplo 2, observemos que $v_3 = \frac{5}{11}\,v_1 + \frac{2}{11}\,v_2$.

Problemas

2.1* Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}[x]$. Determine se os polinômios $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ são linearmente dependentes, onde $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4$ e $h(x) = 2x^3 + 8x^2 - 8x + 7$.

2.2 Verifique, em cada caso, se o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ indicado é linearmente dependente:
(a) $\{(2, -1, 4), (-4, 10, 2)\}$;
(b) $\{(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)\}$;
(c) $\{(1, 0, 2), (3, 1, 5), (-1, 2, 1), (4, 0, 1)\}$.

2.3 Quais dos seguintes conjuntos de vetores em $\mathbb{R}^4$ são linearmente dependentes?
(a) $\{(3, 8, 7, -3), (1, -1/2, 1, 3), (1, 4, 0, 3)\}$;
(b) $\{(0, 0, 1, 1), (2, 2, 0, 0), (3, 3, 0, -3)\}$;
(c) $\{(1, 0, -1, 2), (0, 2, 3, 1), (0, 1, 1, 0), (-2, 1, 2, 1)\}$.

2.4 Para quais valores reais de a os vetores

$$v_1 = (a, -1, -1), \quad v_2 = (-1, a, -1) \quad \text{e} \quad v_3 = (-1, -1, a)$$

formam um conjunto linearmente dependente em $\mathbb{R}^3$?

2.5 Seja V um espaço vetorial e seja $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de V. Mostre que qualquer subconjunto não vazio de α é também linearmente independente.

2.6 Mostre que se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto linearmente dependente de vetores em um espaço vetorial V e se v_5 é um vetor qualquer em V, então $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ também é linearmente dependente.

2.7 Mostre que se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ gera um espaço vetorial V e se v_4 é uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3, então $\{v_1, v_2, v_3\}$ ainda gera V.

2.8 Demonstre a Proposição 3.2.1.

2.9 Mostre que se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço vetorial V e se $v_4 \notin G(v_1, v_2, v_3)$, então $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é linearmente independente.

2.10 Dados os elementos $v_1, \ldots, v_r$ de um espaço vetorial V, mostre que esses são linearmente independentes se, e somente se, é injetiva a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^r & \to & V \\ & (a_1, \ldots, a_r) & \mapsto & a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r\,. \end{array}$$

3 Bases e Dimensão

Nesta seção introduziremos os dois conceitos fundamentais no contexto dos espaços vetoriais: base e dimensão. Esses dois conceitos esclarecem a estrutura desses espaços e ao mesmo tempo simplificam as demonstrações de vários resultados sobre eles.

3.1 Bases

Seja $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial V. Dizemos que α é uma *base* de V se as seguintes condições são verificadas:

(i) α é linearmente independente;

(ii) $V = G(\alpha)$.

Vimos no Exemplo 1, da seção anterior, que o conjunto $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente independente. Este conjunto também gera $\mathbb{R}^3$, pois qualquer vetor $v = (a_1, a_2, a_3)$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. Assim, α, com a ordenação dada pelos índices, é uma base de $\mathbb{R}^3$, chamada *base canônica* de $\mathbb{R}^3$. Este é um caso particular do próximo exemplo.

Exemplo 1. Definimos o *símbolo de Kronecker*[1], δ_{ij}, para $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, como

[1]Leopold Kronecker (Alemanha, 1823 – 1891) foi um dos grandes matemáticos do século XIX. Além de sua grande e profunda contribuição à Matemática, ficou famoso

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Seja $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para cada $1 \leq i \leq n$, denotemos por e_i o vetor

$$(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{ij}, \ldots, \delta_{in}) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$$

em $\mathbb{R}^n$, onde a componente 1 encontra-se na i-ésima posição. O conjunto $\alpha = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é linearmente independente, pois a equação

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n = 0$$

é satisfeita somente se $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. Além disto, este conjunto também gera $\mathbb{R}^n$, pois qualquer vetor $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n \,.$$

Assim, α, com a ordenação dada pelo índices dos $e_i's$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, chamada *base canônica* de $\mathbb{R}^n$.

O próximo exemplo apresenta a *base canônica* de $\mathcal{M}(m, n)$.

Exemplo 2. Sejam

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\alpha = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ é uma base de $\mathcal{M}(2, 2)$. Com efeito, para vermos que α gera $\mathcal{M}(2, 2)$, observemos que um vetor qualquer

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

em $\mathcal{M}(2, 2)$ pode ser escrito como

$$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 \,.$$

pela polêmica envolvendo os trabalhos de Cantor, o criador da Teoria dos Conjuntos, que Kronecker não considerava Matemática.

Para verificarmos que α é linearmente independente, suponhamos que

$$a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4 = 0,$$

ou seja,

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue-se que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ e, portanto, α é linearmente independente. A base α é chamada a *base canônica* de $\mathcal{M}(2,2)$. Mais geralmente, a *base canônica* de $\mathcal{M}(m,n)$ é formada por mn matrizes distintas, cada uma das quais possuindo uma única entrada igual a 1 e todas as demais entradas iguais a 0, ordenadas de forma semelhante ao que foi feito no caso $\mathcal{M}(2,2)$.

A noção de base é uma generalização para espaços vetoriais arbitrários do sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ já que, como veremos a seguir, uma base de um espaço vetorial V é um conjunto gerador no qual cada vetor de V pode ser escrito de *modo único* como combinação linear desses vetores.

Teorema 3.3.1. *Seja $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial V. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *α é uma base de V;*

(ii) *cada vetor v em V pode ser escrito de modo único na forma*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

Demonstração Suponhamos que α é uma base de V. Tomemos $v \in V$. Como α gera V, existem números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n\,. \tag{1}$$

Para mostrar que a combinação linear em (1) é única, suponhamos que existem
$b_1, b_2, \ldots, b_n$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n\,. \tag{2}$$

De (1) e (2) segue que

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0. \qquad (3)$$

Como α é independente, a equação (3) é satisfeita somente se $a_j - b_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$, ou seja, se $b_j = a_j$ para todo $1 \leq j \leq n$. Como $v \in V$ foi tomado de modo arbitrário, (ii) segue. Suponhamos agora que α tem a propriedade de que cada vetor v em V pode ser escrito de modo único como combinação linear dos elementos de α. Pela definição de espaço gerado, claramente α gera V. Para mostrarmos que α é independente, consideremos a equação

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0.$$

Como $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$ e esta escrita é única, segue que $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. ■

Os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que aparecem no Teorema 3.3.1 são chamados *coordenadas* de v na base α. A matriz $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

denotada por $[v]_\alpha$, é chamada a *matriz das coordenadas* de v na base α. Por exemplo, se α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $v = (1, 2, 1)$, então

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tomemos agora $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, que é uma base de $\mathbb{R}^3$. Então

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, o vetor v se localiza em uma mesma posição no espaço cartesiano, porém o modo como ele é determinado no espaço depende da base com a qual estamos trabalhando. Os vetores de uma base de $\mathbb{R}^3$ (respectivamente $\mathbb{R}^2$) especificam um *sistema de coordenadas* no espaço cartesiano (respectivamente no plano cartesiano).

Observamos que a matriz das coordenadas de um vetor em relação a uma base α não depende apenas de α, mas também da ordem na qual escrevemos os seus vetores, já que uma mudança na ordem dos vetores da base implica numa mudança correspondente da ordem das entradas da matriz. Dessa forma, *uma base de um espaço vetorial será sempre considerada como um conjunto ordenado de vetores.*

O próximo teorema mostra que um conjunto gerador de um espaço vetorial V sempre contém uma base de V.

Teorema 3.3.2. *Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores, podemos extrair uma base de V.*

Demonstração Consideremos $\alpha_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Devemos extrair um conjunto linearmente independente de α_0. Se α_0 é linearmente independente, então α_0 é uma base de V, e a demonstração termina aqui. Se α_0 é linearmente dependente, segue do Teorema 3.2.3 que existe um vetor de α_0 que pode ser escrito como combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponhamos que este vetor seja v_n, ou seja, que v_n é uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$. O conjunto $\alpha_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ ainda gera V. (Por quê? Veja Problema 2.7). Se α_1 é linearmente independente, então α_1 é uma base de V. Se α_1 é linearmente dependente, então um dos vetores de α_1, digamos v_{n-1}, é uma combinação linear dos demais. O conjunto $\alpha_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}\}$ ainda gera V. Se α_2 é linearmente independente, então α_2 é uma base de V. Se α_2 é linearmente dependente, prosseguimos como anteriormente. Após uma quantidade finita de passos, obteremos um conjunto α_r formado por $n-r$ vetores $(0 \leq r \leq n-1)$ linearmente independentes que ainda geram V. ■

O próximo resultado generaliza o Teorema 3.2.2.

Teorema 3.3.3. *Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores de V é linearmente dependente. (Consequentemente, qualquer conjunto de vetores de V linearmente independente tem no máximo n vetores).*

Demonstração Consideremos $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Pelo Teorema 3.3.2, podemos extrair de α uma base de V. Suponhamos sem perda de generalidade que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ seja esta base (notemos que $1 \leq r \leq n$). Consideremos agora $w_1, w_2, \ldots, w_m$ vetores de V, com $m > n$. Vamos mostrar que estes vetores são linearmente dependentes. De fato, como β é uma base de V, existem números reais a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r)$ tais que

$$\left\{\begin{array}{l} w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1r}v_r, \\ w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2r}v_r, \\ \ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ w_m = a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mr}v_r. \end{array}\right. \tag{4}$$

Se $x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_mw_m = 0$, segue de (4) que

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m)v_1 + \cdots + \\ &+ (a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_m)v_r = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Como β é linearmente independente, a equação (5) nos fornece o sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \vdots \qquad\quad\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_m = 0 \end{array}\right.$$

que tem r equações e $x_1, x_2, \ldots, x_m$ como incógnitas. Como $r < m$, o Corolário 2.2.7 garante que o sistema linear em questão admite infinitas soluções. Logo, ele admite uma solução não trivial, ou seja, existe uma solução com algum x_i não nulo. Portanto, os vetores $w_1, w_2, \ldots, w_m$ são dependentes. ■

Um espaço vetorial não nulo V é chamado de *dimensão finita* se contém um conjunto finito $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores que constitui uma base de V. Se não existir um tal conjunto, dizemos que V é de *dimensão infinita.* Convencionamos que o espaço vetorial nulo é um espaço de dimensão finita.

O próximo resultado, que é uma consequência do Teorema 3.3.3, nos garante que *todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de elementos.*

Teorema 3.3.4. *Sejam $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ duas bases de um espaço vetorial V. Então, $r = s$. Além disso, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são as matrizes com coeficientes reais tais que*

$$v_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} w_j \quad e \quad w_j = \sum_{k=1}^{r} b_{jk} v_k,$$

então $AB = \mathrm{I}$.

Demonstração Como α gera V e β é um conjunto linearmente independente, segue do Teorema 3.3.3 que $s \leq r$. Por outro lado, como β gera V e α é um conjunto linearmente independente, segue do Teorema 3.3.3 que $r \leq s$. Portanto, $r = s$.

Sejam A e B tais que

$$v_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} w_j \quad \text{e} \quad w_j = \sum_{k=1}^{r} b_{jk} v_k.$$

. Logo

$$\begin{aligned} v_i = \textstyle\sum_{j=1}^{r} a_{ij} w_j \quad &= \quad \textstyle\sum_{j=1}^{r} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{r} b_{jk} v_k\right) \\ &= \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) v_k. \end{aligned}$$

Como os v_i, $i = 1, \ldots, r$ formam um conjunto linearmente independente, isto acarreta (justifique) que

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik},$$

logo $AB = \mathrm{I}$, provando a parte que faltava do resultado. ■

3.2 Dimensão

O número de elementos de uma base de um espaço vetorial V de dimensão finita é chamado de *dimensão* de V e denotado por $\dim V$. Convencionamos que se V é o espaço vetorial nulo, então $\dim V = 0$.

Exemplo 3. $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}(m,n)$ são espaços vetoriais de dimensão finita. A dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n, já que a base canônica de $\mathbb{R}^n$ tem n elementos (ver Exemplo 1). Por esta razão, $\mathbb{R}^n$ é chamado de *espaço n-dimensional*. Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são usualmente chamados de espaços bidimensional e tridimensional, respectivamente. Já a dimensão de $\mathcal{M}(m,n)$ é $m \cdot n$ (ver Exemplo 2). O espaço vetorial $\mathbb{R}[x]$, introduzido por Peano e que apresentamos no Exemplo 3 da Seção 1, Capítulo 1, é um espaço vetorial que tem dimensão infinita. De fato, tomemos $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e suponhamos que $\alpha = \{p_1, \ldots, p_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}[x]$. Observemos que qualquer combinação linear dos elementos de α tem grau no máximo M, onde $M = \max\{\text{grau}(p_i)\,;\ 1 \leq i \leq n\}$. Assim, o polinômio $q(x) = x^{M+1}$ está em $\mathbb{R}[x]$, mas não pode ser escrito como combinação linear dos elementos de α. Portanto, α não forma uma base de $\mathbb{R}[x]$. Como n foi tomado de modo arbitrário, vemos que nenhum conjunto finito de vetores em $\mathbb{R}[x]$ constitui uma base para este espaço vetorial.

Vimos no Teorema 3.3.2 que em espaços vetoriais V de dimensão finita, um conjunto gerador contém sempre uma base de V. A seguir, veremos que um conjunto linearmente independente está contido em alguma base de V.

Teorema 3.3.5. *Qualquer subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.*

Demonstração Suponhamos $\dim V = n$. Seja $\alpha = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de V. Pelo Teorema 3.3.3, $r \leq n$. Se α gera V, então α é uma base de V, e a demonstração acaba aqui (neste caso, $r = n$). Se α não gera V, então existe um vetor de V que não pertence ao espaço gerado por α. Chamemos este vetor de w_{r+1}. O conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_{r+1}\}$ é linearmente independente. (Por quê? Veja

Problema 2.9). Se este conjunto gera V, temos então uma base de V que contém α. Caso contrário, prosseguimos usando o argumento acima. Como não podemos ter mais do que n vetores independentes em V, após um número finito de passos teremos obtido uma base de V que contém os vetores de α. ■

Terminamos esta seção apresentando um resultado que envolve a noção de dimensão para subespaços. Mais precisamente, mostraremos que a dimensão de um subespaço W de um espaço vetorial de dimensão finita V não pode exceder a dimensão de V e que a única maneira de W ter a mesma dimensão de V é sendo igual a V.

Teorema 3.3.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se W é um subespaço de V, então W tem também dimensão finita e* $\dim W \leq \dim V$. *Além disso, se* $\dim W = \dim V$*, então* $W = V$.

Demonstração Se $W = \{0\}$, W tem dimensão finita. Se $W \neq \{0\}$, tome $w_1 \in W$ com $w_1 \neq 0$. O conjunto $\alpha_1 = \{w_1\}$ é independente. Se α_1 gera W, então α_1 é uma base de W. Assim, W tem dimensão finita igual a 1. Se α_1 não gera W, existe $w_2 \in W$ com $w_2 \notin G(w_1)$. O conjunto $\alpha_2 = \{w_1, w_2\}$ é independente. Se α_2 gera W, então W tem dimensão finita igual a 2. Se α_2 não gera W, prosseguimos com o raciocínio anterior. Como $\dim V$ é finita, digamos n, e qualquer conjunto independente de V tem no máximo n vetores, existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ com $m \leq n$ tal que

$$\alpha_m = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

é uma base de W. Isto prova que W tem dimensão finita e que $\dim W = m$, com $m \leq n$.

Suponhamos agora que $\dim W = \dim V = n$. Seja $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ uma base de W. Suponhamos que $W \neq V$. Como $W \subset V$, existe então um vetor de V que não está em W. Chamemos este vetor de v. Como $v \notin W$, o conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, v\}$ é um conjunto de vetores de V linearmente independente. Como este conjunto tem $n + 1$ vetores e $\dim V = n$, temos uma contradição. Portanto, de fato, $W = V$. ■

Observe que a demonstração da primeira parte do Teorema 3.3.6 nos dá um método para acharmos uma base de um subespaço. Em particular, mostramos que *todo espaço vetorial não nulo de dimensão finita tem uma base*.

Problemas

3.1* Seja V um espaço vetorial tal que $\dim V = n$. Prove que:

(a) n vetores linearmente independentes de V formam uma base de V;

(b) n vetores que geram V formam uma base de V.

Em geral, para mostrar que um conjunto de vetores α é uma base de um espaço vetorial V, devemos verificar que os vetores em α são linearmente independentes e que geram V. No entanto, se soubermos que V tem dimensão n e que α tem n elementos, então para que α seja uma base de V, basta verificar que os seus elementos são linearmente independentes ou que geram V, pois uma condição automaticamente implica a outra. Ou seja, o trabalho de verificar se α é uma base fica simplificado!

3.2* Seja V o espaço vetorial das matrizes simétricas 2×2. Mostre que $\dim V = 3$ e exiba uma base de V.

3.3* Sejam U e W os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(a,b,c,d)\,;\; b+c+d=0\}, \quad W = \{(a,b,c,d)\,;\; a+b=0, c=2d\}.$$

Ache uma base e a dimensão de

(a) U, (b) W, (c) $U \cap W$, (d) $U + W$.

3.4 Seja $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,-1)$ e $v_3 = (2,0,2)$.

(a) α é linearmente independente ou dependente? Justifique a sua resposta.

(b) Obtenha $\beta \subset \alpha$ tal que β é independente e que $G(\beta) = G(\alpha)$.

(c) Qual a dimensão de $G(\alpha)$? Justifique.

3.5 Seja U um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita. Mostre que existe um subespaço W de V tal que $V = U \oplus W$.

3.6 Determine se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

formam uma base de $\mathcal{M}(2,2)$.

3.7 Determine a dimensão do espaço vetorial de todas as matrizes 3×3 triangulares superiores.

3.8 Seja A uma matriz 3×3. Por que o conjunto $I,\ A, A^2, \ldots, A^9$ é linearmente dependente?

3.9 Determine a dimensão do espaço vetorial de todos os polinômios p de grau ≤ 4 tais que $p(1) = 0$.

3.10 Seja W o subespaço vetorial de $\mathcal{M}(2,2)$ dado por

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ ; \ a = d \text{ e } c = a + b \right\}.$$

(a) Qual a dimensão de W?

(b) O conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de W? Por quê?

3.11 Encontre uma base e a dimensão do conjunto solução dos seguintes sistemas:

$$\text{(a)} \begin{cases} x + 2y - 2z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 2t = 0\,; \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 2y - 4z + 2t = 0\,. \end{cases}$$

3.12 Podemos ter uma base de $\mathbb{R}[x]_n$ formada por $n+1$ polinômios de grau n? Justifique a sua resposta.

3.13 Encontre as coordenadas de:

(a) $u = (1, -1)$ em relação à base $\{(2, -4), (3, 8)\}$ de $\mathbb{R}^2$;

(b) $u = (1, -1)$ em relação à base $\{(1, 1), (0, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$;

(c) $p(x) = 2 + x - x^2$ em relação à base $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$ de $\mathbb{R}[x]_2$.

3.14 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja α uma base de V. Mostre que:

(a) $[v + w]_\alpha = [v]_\alpha + [w]_\alpha$ para quaisquer v e w em V;

(b) $[cv]_\alpha = c[v]_\alpha$ para todo v em V e para todo $c \in \mathbb{R}$.

3.15 Sejam U e V espaços vetoriais, de dimensões r e s, respectivamente. Mostre que o espaço vetorial $U \times V$, definido no Problema 1.5, do Capítulo 1, tem dimensão $r + s$.

Sugestão Se $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é uma base de U e $\{v_1, \ldots, v_s\}$ é uma base de V, mostre que $\{(u_i, 0);\ 1 \le i \le r\} \cup \{(0, v_j);\ 1 \le j \le s\}$ é uma base de $U \times V$.

3.16 Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V tais que $U \cap W = \{0\}$. Sejam $\{u_1, \ldots, u_r\}$ e $\{w_1, \ldots, w_s\}$, respectivamente, bases de U e W. Mostre que $\{u_i;\ 1 \le i \le r\} \cup \{w_j;\ 1 \le j \le s\}$ é uma base de $U + W$. Conclua que $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

4 Espaço Linha de uma Matriz

Nesta seção vamos apresentar um método para encontrar uma base de subespaços de $\mathbb{R}^n$, usando as transformações elementares nas linhas de uma matriz.

Para uma matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

os vetores

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})\\
v_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})\\
\vdots \quad & \qquad \vdots\\
v_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})
\end{aligned}
$$

em $\mathbb{R}^n$ formados pelas linhas de A são chamados os *vetores linha* de A. O espaço $G(v_1, \ldots, v_m)$ gerado pelos vetores linha de A é chamado *espaço linha* de A e denotado por $\mathcal{L}(A)$. Note que $\mathcal{L}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

O espaço linha de uma matriz não se altera ao aplicarmos transformações elementares. De fato, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, é fácil verificar que

$$
\begin{aligned}
&G(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m) = G(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_m),\\
&G(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m) = G(v_1, \ldots, kv_i, \ldots, v_m)\ (k \neq 0),\\
&G(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m) = G(v_1, \ldots, v_i + kv_j, \ldots, v_j, \ldots, v_m)\ (k \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Em outras palavras,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B), \quad \text{onde} \quad B = e(A), \ \text{com}\ e\colon L_i \leftrightarrow L_j\,;\\
&\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B), \quad \text{onde} \quad B = e(A), \ \text{com}\ e\colon L_i \to kL_i\,(k \neq 0);\\
&\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B), \quad \text{onde} \quad B = e(A), \ \text{com}\ e\colon L_i \to L_i + kL_j\,(k \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Disto decorre o seguinte importante fato:

Duas matrizes equivalentes geram o mesmo espaço linha.

O próximo resultado mostra como obter uma base para o espaço linha de uma matriz.

Teorema 3.4.1. *As linhas não nulas de uma matriz $\tilde{A}$, na forma escalonada e equivalente a uma matriz A, formam uma base para o espaço linha de A.*

Demonstração Sejam A uma matriz $m \times n$ e $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ uma matriz na forma escalonada equivalente a A. Suponhamos que $\tilde{A}$ tem p linhas não nulas e consideremos os vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (\tilde{a}_{11}, \ldots, \tilde{a}_{1n}) \\ v_2 &= (\tilde{a}_{21}, \ldots, \tilde{a}_{2n}) \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ v_p &= (\tilde{a}_{p1}, \ldots, \tilde{a}_{pn}) \end{aligned}$$

formados pelas linhas não nulas de $\tilde{A}$. Pelo que vimos anteriormente, $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\tilde{A}) = G(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, já que $\tilde{A}$ é uma matriz equivalente a A. Vamos mostrar que $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ é linearmente independente. Para cada $1 \leq i \leq p$, seja k_i a coluna na qual aparece o primeiro elemento não nulo da i-ésima linha de $\tilde{A}$, ou seja $\tilde{a}_{ik_i} = 1$ e $\tilde{a}_{i,l} = 0$, se $l < k_i$. Suponhamos que $a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = 0$, que reescrevemos como segue:

$$\begin{array}{cl} & a_1(0, \ldots, 0, \tilde{a}_{1k_1}, \star, \ldots, \star, \ \ 0 \ \ , \ldots, 0, \ \ldots, \ \star) \\ + & a_2(0, \ldots, 0, \ 0 \ \ , 0, \ldots, 0, \ \tilde{a}_{2k_2}, \ldots, 0, \ \ldots, \ \star) \\ & \quad\vdots \\ + & a_p(0, \ldots, 0, \ 0 \ \ , 0, \ldots, 0, \ 0, \ \ldots, \tilde{a}_{pk_p}, \ \ldots, \star) \\ & \\ = & \quad (0, \ldots, 0, \ 0 \ , \ 0, \ldots, 0, \ \ 0 \ \ , \ldots, 0, \ \ldots, \ 0), \end{array}$$

onde $\star$ representa um número real.

Logo, a igualdade de vetores, acima, nos fornece um sistema de equações lineares nas incógnitas $a_1, a_2, \ldots, a_p$, o qual contém as equações

$$a_1 \tilde{a}_{1k_1} = \cdots = a_p \tilde{a}_{pk_p} = 0.$$

Como $\tilde{a}_{ik_i} = 1$, para todo $i = 1, \ldots, p$, segue que $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$.

Portanto, $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ gera $\mathcal{L}(A)$ e é linearmente independente, ou seja, $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ forma uma base de $\mathcal{L}(A)$. ■

Corolário 3.4.2. *O posto p_A de uma matriz A é o número máximo de linhas linearmente independentes da mesma. Mais precisamente, $p_A = \dim \mathcal{L}(A)$.*

Demonstração A dimensão do espaço linha de uma matriz é igual ao número máximo de linhas linearmente independentes da mesma. Como o espaço linha de uma matriz é igual ao espaço linha de uma matriz escalonada equivalente a ela, sua dimensão é igual ao número de linhas não nulas dessa última, que é igual ao posto da matriz. ■

O exemplo a seguir nos mostrará como o Teorema 3.4.1 pode nos ajudar a determinar o espaço gerado por vetores em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1. Determine uma base do espaço gerado pelos vetores $v_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$, $v_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$, $v_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$ e $v_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$.

O espaço gerado pelos vetores v_1, v_2, v_3 e v_4 é o espaço linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 10 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo esta matriz à forma escalonada obtemos a matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os vetores linha não nulos da matriz $\tilde{A}$ são os vetores $w_1 = (1, 0, 0, -2, 3)$, $w_2 = (0, 1, 0, -1, 0)$ e $w_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$. Estes vetores formam uma base para o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por v_1, v_2, v_3 e v_4.

Assim, se $W = G(v_1, v_2, v_3, v_4)$, então

$$\begin{aligned} W &= G(w_1, w_2, w_3) \\ &= \{xw_1 + yw_2 + zw_3\,;\; x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z, -2x - y + z, 3x)\,;\; x, y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Problemas

4.1* Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores

$$u_1 = (1, -2, 3, -3), \quad u_2 = (2, 3, 1, -4), \quad u_3 = (3, 8, -3, -5).$$

(a) Ache uma base e a dimensão de U.
(b) Estenda a base de U a uma base de todo o espaço $\mathbb{R}^4$.

4.2* Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores

$$u_1 = (2, 4, -2, 6), \quad u_2 = (1, 2, 1/2, -1) \text{ e } u_3 = (3, 6, 3, -7)$$

e seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores

$$w_1 = (1, 2, -4, 11) \quad \text{e} \quad w_2 = (2, 4, -5, 14).$$

Mostre que $U = W$.

4.3 Determine se $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ e $(0, 3, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

4.4 Ache uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$w_1 = (-1, 4, 2, -1), \quad w_2 = (1, -3, -1, 2) \quad \text{e} \quad w_3 = (4, -10, -2, 10).$$

Estenda a base de W a uma base de todo $\mathbb{R}^4$.

4.5 Encontre os vetores da base canônica que podem ser acrescentados ao conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ para formar uma base de $\mathbb{R}^5$, onde

$$v_1 = (1, -4, 2, -3, 0), \quad v_2 = (-3, 8, -4, 6, 0) \text{ e } v_3 = (0, -1, 2, 5, -4).$$

Bibliografia

[1] H. P. Bueno, *Álgebra Linear, um segundo curso*, Coleção Textos Universitários, SBM, 2006.

[2] P. Halmos, *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, Editora Ciência Moderna, 2001.

[3] A. Hefez e M. L. T. Villela, *Códigos Corretores de Erros*, Coleção Matemática e Aplicações, IMPA, 2008.

[4] A. Hefez e M. L. T. Villela, *Números Complexos e Polinômios*, Coleção PROFMAT, SBM, 2012.

[5] V. J. Katz, *A History of Mathematics - an Introduction*, HarperCollins College Publishers, 1993.

[6] S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, 2nd edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1986.

[7] E.L. Lima, *Álgebra Linear*, 3ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998.

[8] E.L. Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.