

Instituto Federal de Santa Catarina
Curso de engenharia em telecomunicação
Sinais e Sistemas I - SIS

*Solução de sistemas
e
Resposta de entrada nula*

Prof. Deise Monquelate Arndt

Fonte: Lathi - Sinais e Sistemas Lineares
Material prof. Diego de Medeiros

São José, maio de 2016

Equação diferença e Notação Operacional

- Equação diferença genérica (operador de avanço):

$$y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \dots + a_N y[n] = b_0 x[n+M] + b_1 x[n+M-1] + \dots + b_M x[n]$$

- Equação diferença em notação operacional:

$$\left(E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N \right) y[n] = \left(b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \dots + b_{N-1} E + b_N \right) x[n]$$

- Forma alternativa:

$$Q[E] y[n] = P[E] x[n]$$

Onde $Q[E]$ e $P[E]$ são os operadores polinomiais de ordem N

$$Q[E] = E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N$$

$$P[E] = b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \dots + b_{N-1} E + b_N$$

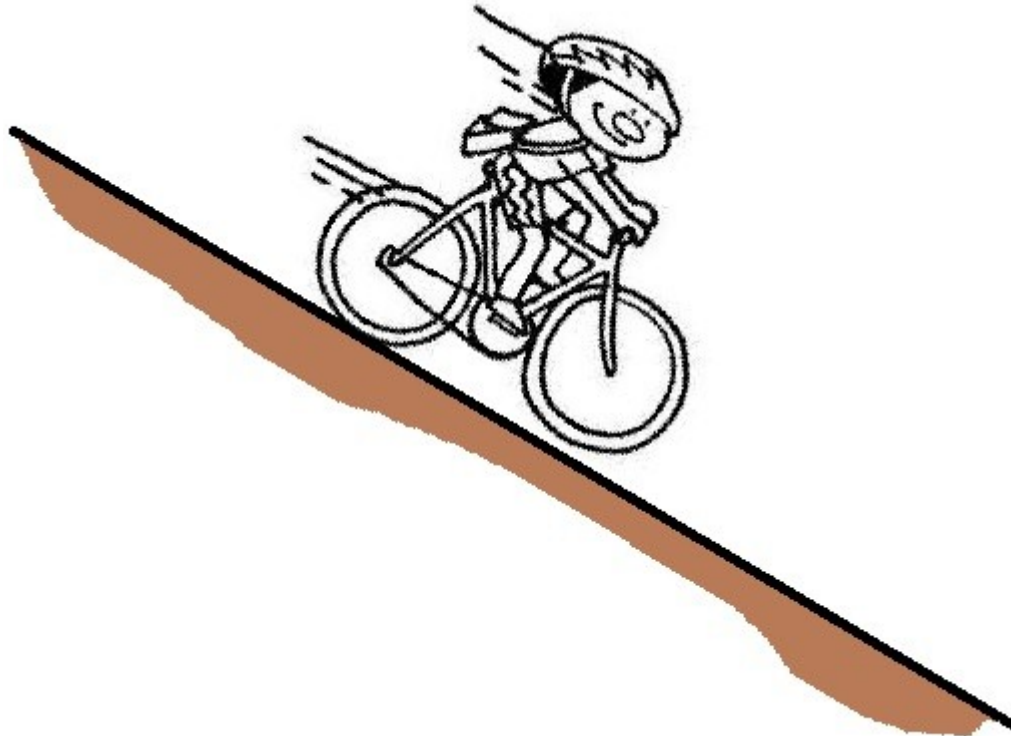
Solução de sistemas (1)

- Sistema 1 – Bicicleta em via horizontal
 - Entrada – Força da perna pedalando
 - Saída – Movimento da bicicleta



Solução de sistemas (2)

- Sistema 2 – Bicicleta em via inclinada
 - Entrada – Força da perna pedalando
 - Saída – Movimento da bicicleta
 - Condições iniciais – Movimento da bicicleta “na banguela”



Solução de sistemas (3)

- Solução total do sistema medida separadamente:
 - Resposta do sistema devido às condições iniciais
 - Entradas iguais a zero
 - **Resposta de entrada nula**
 - Resposta do sistema devido à entrada
 - Condições iniciais iguais a zero
 - **Resposta de estado nulo**

Resposta de entrada nula (1)

- Solução da equação diferença, assumindo que não há sinais de entrada
- Também conhecida como **solução homogênea**

$$y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \dots + a_N y[n] = 0$$

ou

$$\left(E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N \right) y[n] = 0$$

ou

$$Q[E] y[n] = 0$$

onde

$$Q[E] = E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N$$

- Versões deslocadas do sinal de saída **devem somar 0**

Resposta de entrada nula (2)

- O único sinal que respeita a solução homogênea é a exponencial

$$E^k(\gamma^n) = \gamma^{k+n} = \gamma^k \gamma^n$$

- Solução da resposta de entrada nula na forma:

$$y_0[n] = c \gamma^n$$

- Substituindo

$$c \left(\gamma^N + a_1 \gamma^{N-1} + \dots + a_{N-1} \gamma + a_N \right) \gamma^n = 0$$

Resposta de entrada nula (3)

- Solução não trivial:

$$y^N + a_1 y^{N-1} + \dots + a_{N-1} y + a_N = 0$$

ou

$$Q[y]=0$$

- Solução não trivial é um polinômio de grau N

$$(y - \gamma_1)(y - \gamma_2)\cdots(y - \gamma_N) = 0$$

- Problema pode ser de três formas:

- Raízes distintas
- Raízes repetidas
- Raízes complexas

Soluções - Raízes distintas

- Raízes distintas:

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) \cdots (\gamma - \gamma_N) = 0$$

com $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \cdots \neq \gamma_N$

- Solução:

$$y_0[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n + \cdots + c_N \gamma_N^n$$

onde c_i = constantes do problema, obtidas a partir das condições iniciais

Soluções - Raízes repetidas

- Raízes repetidas:

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) \cdots (\gamma - \gamma_N) = 0$$

com $\gamma_1 = \cdots = \gamma_N$

- Solução:

$$y_0[n] = \left(c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{N-1} n^{N-1} \right) \gamma_1^n$$

onde c_i = constantes do problema, obtidas a partir das condições iniciais

Soluções - Raízes complexas

- Raízes complexas (forma polar):

$$y = \alpha e^{j\beta} \quad \text{e} \quad y^* = \alpha e^{-j\beta}$$

- Solução:

$$y_0[n] = c_1 y^n + c_2 (y^*)^n$$

- Para um sistema real

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

- E então:

$$y_0[n] = \frac{c}{2} \alpha^n \cos(\beta n + \theta)$$

Nomenclatura

$Q[\gamma]$	Polinômio característico
$Q[\gamma]=0$	Equação característica
$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$	Raízes ou valores característicos, autovalores
$\gamma_1^n, \gamma_2^n, \dots, \gamma_N^n$	Modos característicos, modos naturais
$y_0[n]$	Resposta de entrada nula

Exercícios (Lathi)

- Exemplo 3.10, pg. 252
- Exercícios E3.11, E3.12 e E3.13, pg. 255
- Exemplo de computador C3.4