INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
Componente Curricular: Sinais e Sistemas 2
Professora: Elen Macedo Lobato
Aluno: João Pedro Menegali Salvan Bitencourt
Turma: 29006
Data: 19/03/2023

Resolução da 1a. Avaliação de Sinais e Sistemas II

1) Sabendo que a Transformada de Fourier de $\frac{W}{\pi}\text{sinc}(Wt)$ é $\text{ret}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$ calcule $X(\omega)$ para:

a) $8\,\text{sinc}(2t-1)$

Podemos reescrever o sinal $8\,\text{sinc}(2t-1)$ como $8\,\text{sinc}\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)$, onde $W = 2$ e $t = t-\frac{1}{2}$. Além disso, tomando o modelo $x(t-t_0)$, conclui-se que $t_0 = \frac{1}{2}$. Dessa forma, esse atraso faz aparecer a exponencial $e^{-j\omega t_0}$, que será igual à $e^{\frac{-j\omega}{2}}$.

Desconsiderando o atraso e a amplitude do sinal dado, temos o sinal $\frac{2}{\pi}\text{sinc}(2t)$. Para obter 8 a partir de $\frac{2}{\pi}$, multiplicamos os dois lados por 4π, ficando da seguinte maneira:

$$4\pi.\frac{2}{\pi}\text{sinc}(2t-1) \Leftrightarrow 4\pi.\text{ret}\left(\frac{\omega}{2.2}\right).e^{\frac{-j\omega}{2}}$$

Portanto:

$$8\,\text{sinc}(2t-1) \Leftrightarrow 4\pi\,\text{ret}\left(\frac{\omega}{4}\right)e^{\frac{-j\omega}{2}}$$

b) $\frac{8}{\pi}\text{sinc}(4t).\cos(10t)$

Analisando o argumento da função sinc do sinal dado, conclui-se que $W = 4$. Dessa forma, desconsiderando a amplitude dada, o sinal seria $\frac{4}{\pi}\text{sinc}(4t).\cos(10t)$. Para obter $\frac{8}{\pi}$ a partir de $\frac{4}{\pi}$, é preciso multiplicar ambos os lados por 2.

Analisando a portadora $\cos(10t)$ temos que $\omega_c = 10$. Aplicando a transformada de Fourier no sinal de informação obtêm-se:

$$\frac{8}{\pi}\text{sinc}(4t) \Leftrightarrow 2\,\text{ret}\left(\frac{\omega}{8}\right)$$

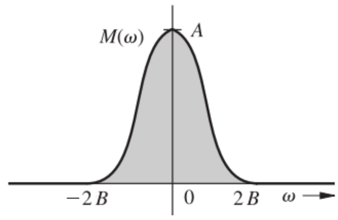
Com a portadora, a transformada resultante fica da seguinte maneira:

$$\frac{8}{\pi}\text{sinc}(4t).\cos(10t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[2\,\text{ret}\left(\frac{\omega-10}{8}\right)+2\,\text{ret}\left(\frac{\omega+10}{8}\right)\right]$$

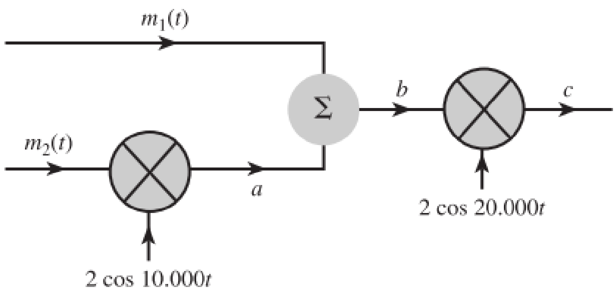
E simplificando as constantes resulta em:

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{sinc}(4\,t).\cos(10\,t) \Leftrightarrow \operatorname{ret}\left(\frac{\omega-10}{8}\right)+\operatorname{ret}\left(\frac{\omega+10}{8}\right)$$

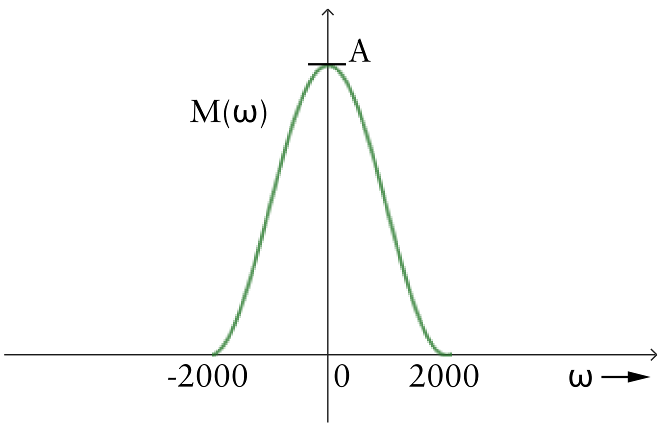
2) Considere o sinal m(t) com o seguinte espectro e B=1000



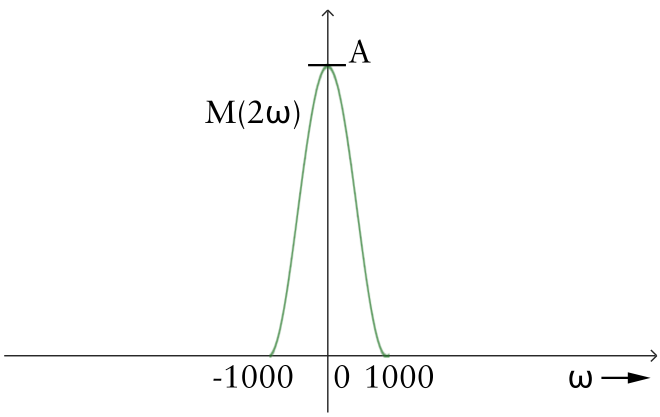
Agora considere o diagrama a seguir, $m_1(t) = m(4t)$ e $m_2(t) = m\left(\frac{t}{2}\right)$, trace os espectros nos pontos **a**, **b** e **c**.



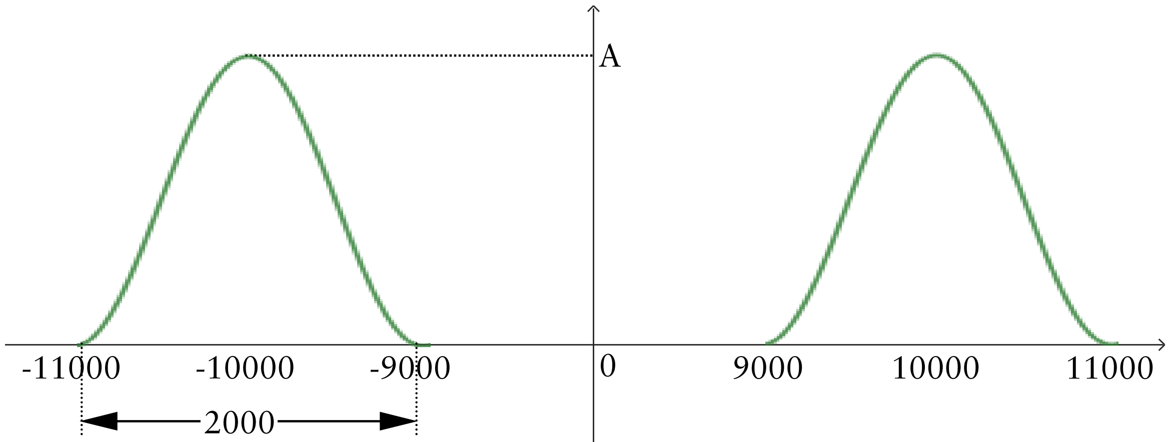
Considerando o ganho, o espectro do sinal dado fica da seguinte forma:



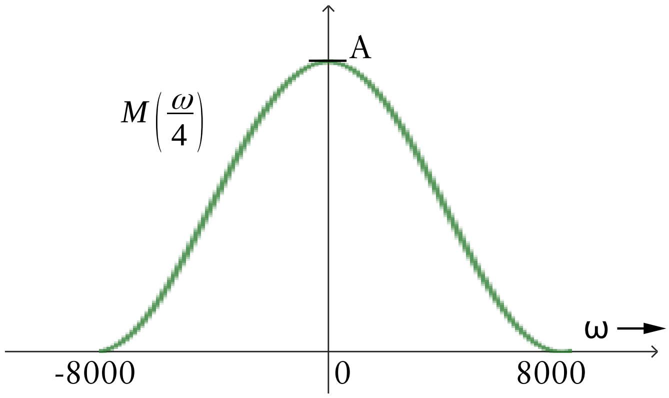
O sinal original é expandido no tempo em $m_2(t)$ e, consequentemente, comprimido na frequência, ficando da seguinte forma:



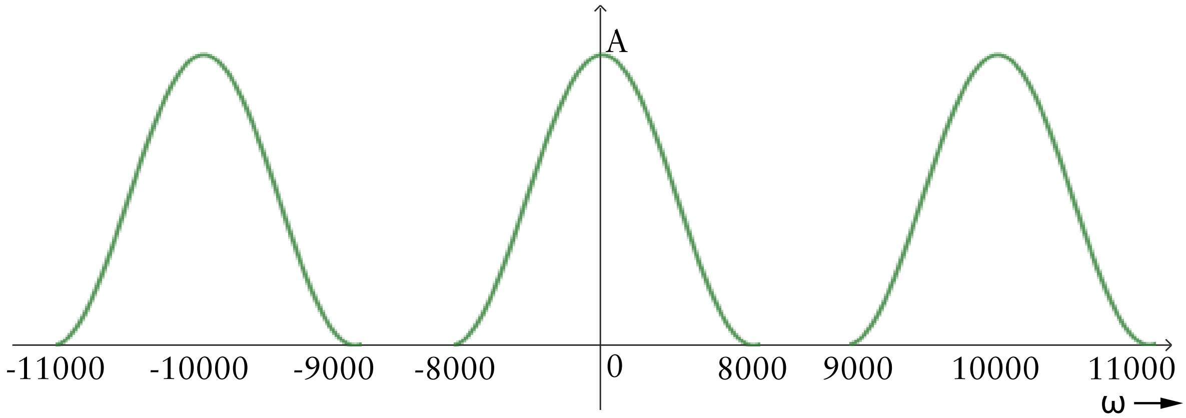
Dessa forma, $W_2 = 1000$. O sinal m_2 é, então, modulado com a portadora $2\cos(10000t)$, o qual mantém a amplitude original. Portanto, o espectro no ponto **a** possui o formato abaixo:



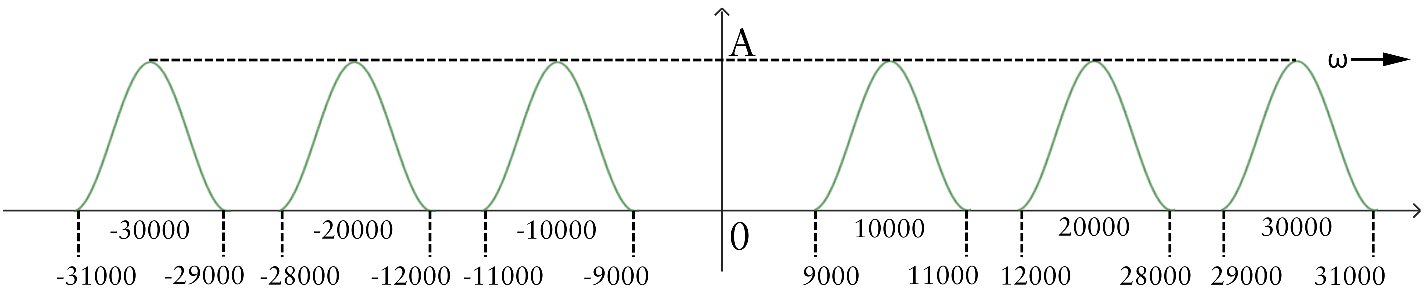
Na etapa seguinte, o sinal do ponto **a** é somado ao sinal $m_1(t)$, que é comprimido no tempo e, consequentemente, expandido na frequência. Abaixo, está o espectro do sinal resultante:



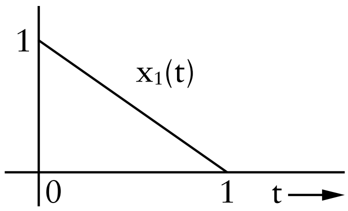
No ponto **b**, o sinal é somado com o sinal do ponto **a**, gerando o seguinte sinal resultante:



Por fim, no ponto **c**, o sinal é modulado com a portadora $2\cos(20000t)$ que mantém a amplitude do sinal. O espectro resultante fica da seguinte forma:



3) Considere o sinal da Figura a seguir. Calcule pela definição a Transformada de Fourier X(ω) desse sinal. Agora, utilizando as propriedades de deslocamento no tempo e escalonamento no tempo, obtenha as transformadas de Fourier dos sinais dos itens (a), (b) e (c).



Pela definição, a Transformada de Fourier é dada por $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$. A função $x_1(t)$, dada acima, é $x_1(t) = -t + 1$, definida entre 0 e 1. Com isso, $X_1(\omega) = \int_0^1 (-t+1)e^{-j\omega t}dt$.

Aplicando integração por partes, obtêm-se: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Identificando $u = -t+1$ e $dv = e^{-j\omega t}dt$, tem-se que $du = -dt$. $v = \int e^{-j\omega t}dt = \frac{e^{-j\omega f}}{-j\omega}$. Dessa forma,

$$\int (-t+1)e^{-j\omega t}dt = (-t+1)\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} + \int \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}dt.$$

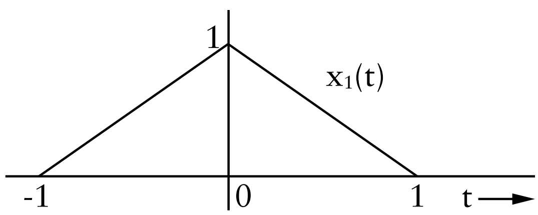
A transformada obtida é $X_1(\omega) = \left[-\frac{(-t+1)\,e^{-j\omega t}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2}\right]_0^1$. Como $(-j)^2 = -1$, obtêm-se:

$$X_1(\omega) = \left[-\frac{(-t+1)\,e^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right]_0^1 = \left(-\frac{(-1+1)e^{-j\omega 1}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega 1}}{\omega^2}\right) - \left(-\frac{(0+1)e^{-j\omega 0}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega 0}}{\omega^2}\right)$$

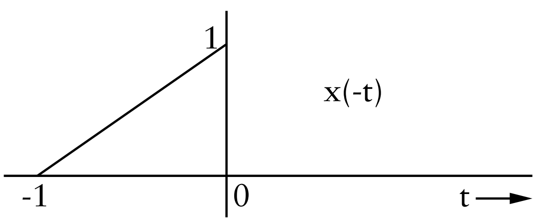
$$X_1(\omega) = \left(0 - \frac{e^{-j\omega}}{\omega^2}\right) - \left(-\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right) = -\frac{e^{-j\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{1-e^{-j\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{j\omega}$$

Portanto: $X_1(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{j\omega}$.

a)



O sinal (a) pode ser obtido com a soma do sinal $x_1(t)$ com sua reversão temporal $x_1(-t)$.



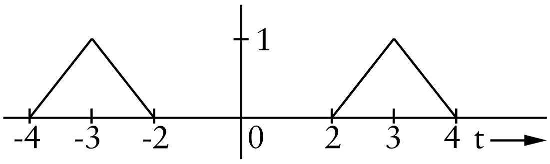
A Transformada de Fourier do sinal rebatido é:

$$x(-t) \Leftrightarrow X(-\omega)$$

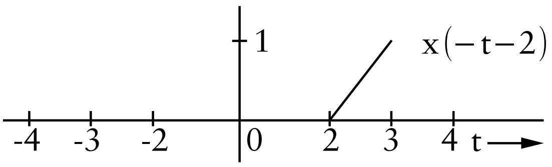
Portanto, usando a propriedade da linearidade da transformada de Fourier, obtêm-se a seguinte expressão:

$$x(t)+x(-t)\Leftrightarrow X(\omega)+X(-\omega)$$

b)

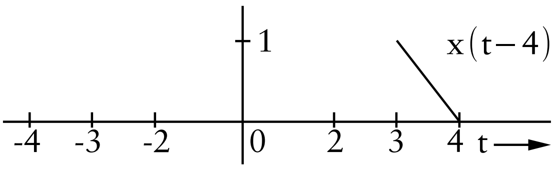


O sinal (b) pode ser obtido somando os seguintes sinais:



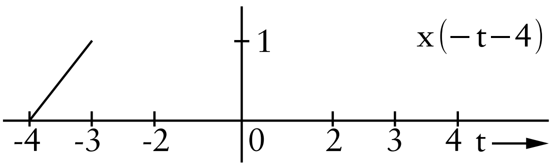
Faz-se a reflexão temporal e desloca-se o sinal para a esquerda de 2. Portanto, a transformada do mesmo torna-se:

$$x(-t-2)\Leftrightarrow X(-\omega)e^{j\omega}$$



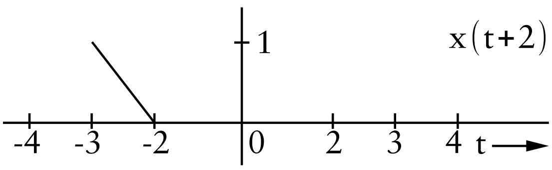
Desloca-se o sinal para a esquerda de 4. Portanto, a transformada do mesmo torna-se:

$$x(t-4)\Leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega}$$



Faz-se a reflexão temporal e desloca-se o sinal para a direita de 4. Portanto, a transformada do mesmo torna-se:

$$x(-t-4)\Leftrightarrow X(-\omega)e^{j\omega}$$



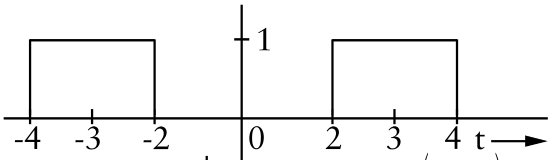
Desloca-se o sinal para a esquerda de 2. A transformada fica da seguinte forma:

$$x(t+2)\Leftrightarrow X(\omega)e^{j\omega}$$

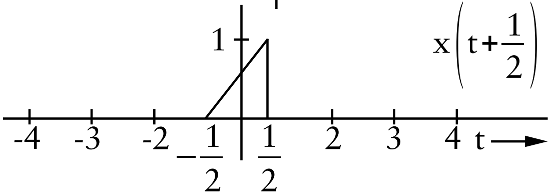
A transformada do sinal (b), portanto, fica da seguinte forma:

$$x(-t-2)+x(t-4)+x(-t-4)+x(t+2)\Leftrightarrow X(-\omega)e^{j\omega}+X(\omega)e^{-j\omega}+X(-\omega)e^{j\omega}+X(\omega)e^{j\omega}$$

c)

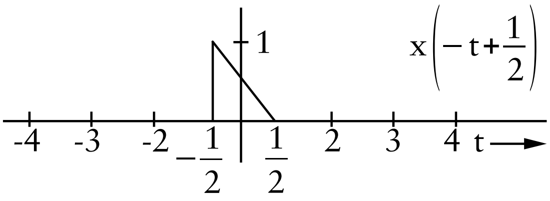


Para obter o sinal (c), somam-se os sinais abaixo:



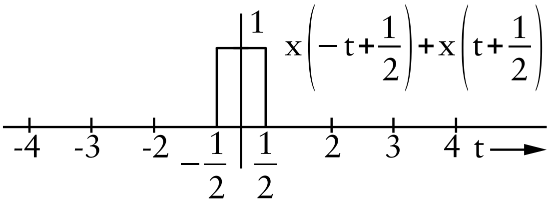
Faz-se a reversão temporal e desloca-se o sinal x(t) para a direita de 0,5. A transformada dá-se por:

$$x\left(-t+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow X(-\omega)e^{-j\frac{\omega}{2}}$$



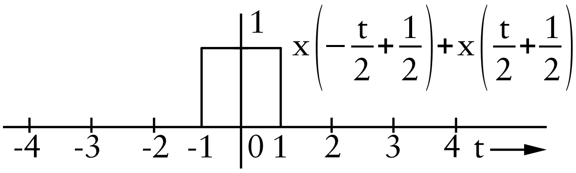
Desloca-se o sinal x(t) para a esquerda de 0,5. A transformada dá-se por:

$$x\left(t+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow X(\omega)e^{j\frac{\omega}{2}}$$



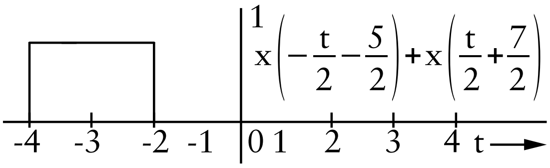
Somam-se os dois sinais. A transformada até este ponto fica da seguinte forma:

$$x\left(-t+\frac{1}{2}\right)+x\left(t+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow X(-\omega)e^{-j\frac{\omega}{2}}+X(\omega)e^{j\frac{\omega}{2}}$$



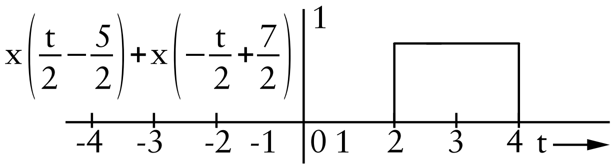
Faz-se uma expansão temporal. A transformada fica da seguinte forma:

$$x\left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)+x\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2X(-\omega)e^{-j\frac{\omega}{2}}+2X(2\omega)e^{j\frac{\omega}{2}}$$



O sinal é, então, deslocado para a esquerda:

$$x\left(-\frac{t}{2}-\frac{5}{2}\right)+x\left(\frac{t}{2}+\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow 2X(-\omega)e^{j\frac{5\omega}{2}}+2X(2\omega)e^{j\frac{7\omega}{2}}$$



Adicionalmente, o sinal obtido no quarto passo é deslocado para a direita:

$$x\left(\frac{t}{2}-\frac{5}{2}\right)+x\left(-\frac{t}{2}+\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow 2X(2\omega)e^{-j\frac{5\omega}{2}}+2X(-\omega)e^{-j\frac{7\omega}{2}}$$

Com isso, a transformada de Fourier dá-se por:

$$x\left(-\frac{t}{2}-\frac{5}{2}\right)+x\left(\frac{t}{2}+\frac{7}{2}\right)+x\left(\frac{t}{2}-\frac{5}{2}\right)+x\left(-\frac{t}{2}+\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow 2X(-\omega)e^{j\frac{5\omega}{2}}+2X(2\omega)e^{j\frac{7\omega}{2}}+2X(2\omega)e^{-j\frac{5\omega}{2}}+2X(-\omega)e^{-j\frac{7\omega}{2}}$$

4) Considere o sinal

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

Determine o parâmetro de decaimento **a** que resulta em uma largura de faixa essencial de 95% igual a 5 Hz.

Sabendo que $\omega = 2\pi f$, temos que $\omega = 2\pi 5 = 10\pi$, portanto, $W = 10\pi$. A faixa $\omega = 0$ a $\omega = 10\pi$, contém 95% da energia do sinal, logo, $E_x = \frac{0,95}{2a}$. Sabendo que:

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$$

e:

$$E_x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left|X(\omega)^2\right| d\omega$$

Para este sinal:

$$\frac{0{,}95}{2a} = \frac{1}{\pi}\int_0^{10\pi} \left(\frac{1}{j\omega + a}\right)^2 d\omega$$

$$\frac{0{,}95}{2a} = \frac{1}{\pi}\int_0^{10\pi} \frac{d\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)\Bigg|_0^{10\pi} = \frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\left(\frac{10\pi}{a}\right)$$

$$\frac{0{,}95}{2a} = \frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\left(\frac{10\pi}{a}\right)$$

$$\frac{0{,}95\pi}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{10\pi}{a}\right)$$

$$\tan\left(\frac{0{,}95\pi}{2}\right) = \frac{10\pi}{a}$$

$$12{,}70620474 = \frac{10\pi}{a}$$

$$a = \frac{10\pi}{12{,}70620474} = 2{,}601473494$$

Logo, o parâmetro de decaimento **a** = 2,601473494.

5) Determine a transformada de Fourier do pulso Gaussiano definido por

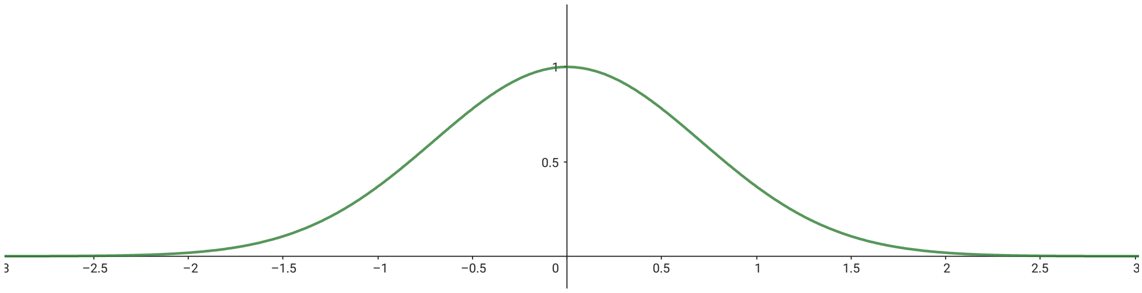
$$x(t) = e^{-t^2}$$

Trace tanto x(t) quanto X(ω). Dica:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(t-a)^2}{2}} dt = 1$$

Teste no MATLAB (use a função fourier).

O gráfico da função x(t) fica da seguinte forma:



A transformada de Fourier da função dada é:

$$e^{-\alpha t^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{-\omega^2}{4\alpha}}, \text{ com } \alpha > 0.$$

Nesse caso, $\alpha = 1$, logo:

$$e^{-t^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{1}}e^{\frac{-\omega^2}{4.1}}$$

$$e^{-t^2} \Leftrightarrow \sqrt{\pi}e^{\frac{-\omega^2}{4}}$$

Com isso, o gráfico de X(ω) ficou da seguinte forma: