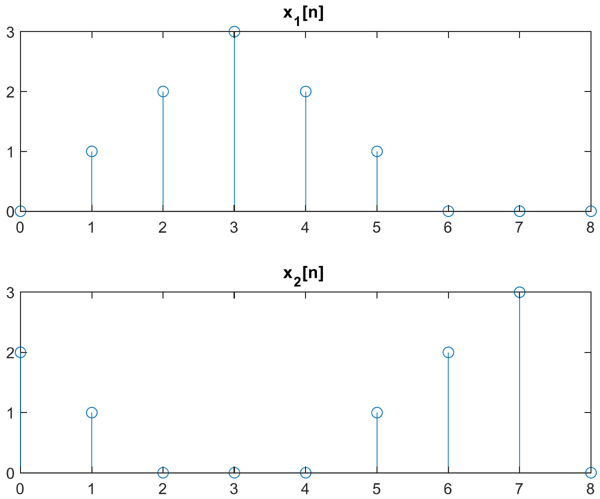
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
Componente Curricular: Processamento de Sinais Digitais
Professor: Elen Macedo Lobato
Alunos: Filipi Virgilio, João Pedro Menegali Salvan Bitencourt e Yago Castro Rosa
Turma: 29007
Data: 11/09/2023

Primeira avaliação de PSD

1) As duas sequências de oito pontos $x_1[n]$ e $x_2[n]$, mostradas na figura a seguir, têm DFT's $X_1[k]$ e $X_2[k]$, respectivamente. Determine a relação entre $X_1[k]$ e $X_2[k]$.



- Obtendo a expressão de $x_1[n]$:

$$x_1[n]=0\,\delta[n]+1\,\delta[n-1]+2\,\delta[n-2]+3\,\delta[n-3]+2\,\delta[n-4]+\delta[n-5]+0\,\delta[n-6]+0\,\delta[n-7]$$

$$x_1[n]=\delta[n-1]+2\,\delta[n-2]+3\,\delta[n-3]+2\,\delta[n-4]+\delta[n-5]$$

- Obtendo a expressão de $x_2[n]$:

$$x_2[n]=2\,\delta[n]+1\,\delta[n-1]+0\,\delta[n-2]+0\,\delta[n-3]+0\,\delta[n-4]+1\,\delta[n-5]+2\,\delta[n-6]+3\,\delta[n-7]$$

$$x_2[n]=2\,\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-5]+2\,\delta[n-6]+3\,\delta[n-7]$$

Dessa forma, pode-se concluir que $x_2[n]$ é deslocado em 4 de $x_1[n]$: $x_2[n] = x_1[n-4]$. Portanto, sendo a janela de 8 pontos:

$$x[(n-4)\bmod 8] \rightarrow X_2[k]=e^{-j\frac{2\pi}{8}4k}.X_1[k]$$

2) Suponha que temos duas sequências de quatro pontos $x[n]$ e $h[n]$, da seguinte forma:

$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$h[n]=2^n \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

a) Calcule a DFT de quatro pontos X[k].

$$X[k]=1e^{-j\frac{2\pi}{4}0.k}+0e^{-j\frac{2\pi}{4}1.k}-1e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}+0e^{-j\frac{2\pi}{4}3.k}$$

$$X[k]=1-e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}$$

b) Calcule a DFT de quatro pontos H[k].

$$H[k]=1e^{-j\frac{2\pi}{4}0.k}+2e^{-j\frac{2\pi}{4}1.k}-4e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}+8e^{-j\frac{2\pi}{4}3.k}$$

$$H[k]=1+2e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+4e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}+8e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

c) Calcule y[n] = x[n]④h[n] (realizando a convolução circular diretamente).

- As sequências possuem os seguintes pontos

x[n] = [1, 0, -1, 0]

h[n] = [1, 2, 4, 8]

- Com h[-n] e realizando o deslocamento circular, obtém-se os seguintes pontos:

h[0] = [1, 8, 4, 2] → h[1] = [2, 1, 8, 4] → h[2] = [4, 2, 1, 8] → h[3] = [8, 4, 2, 1]

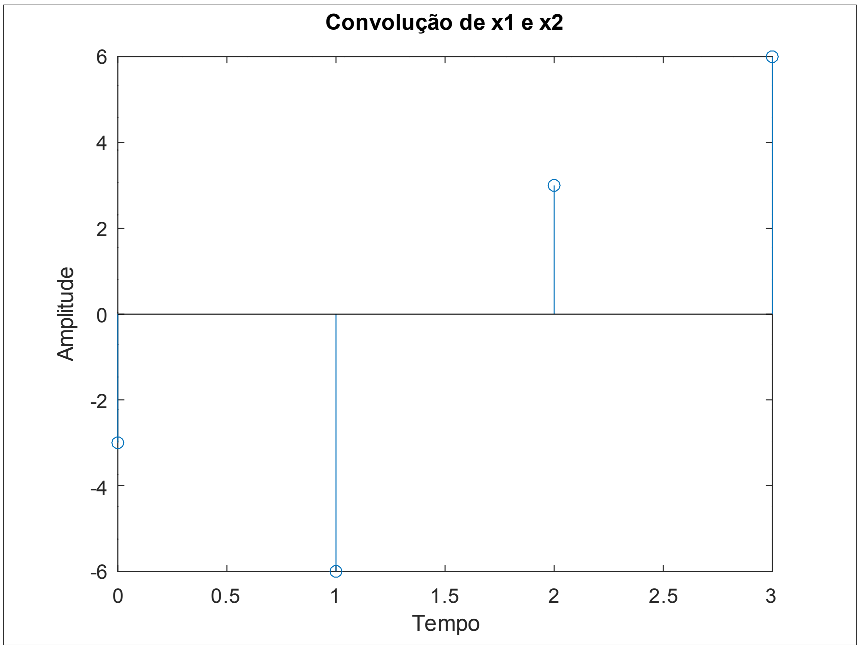
y[0] = 1.1 + 0.8 + (-1).4 + 0.2 = 1 - 4 = -3

y[1] = 1.2 + 0.1 + (-1).8 + 0.4 = 2 – 8 = -6

y[2] = 1.4 + 0.2 + (-1).1 + 0.8 = 4 - 1 = 3

y[3] = 1.8 + 0.4 + (-1).2 + 0.1 = 8 – 2 = 6

$$y[n]=-3\,\delta[n]-6\,\delta[n-1]+3\,\delta[n-2]+6\,\delta[n-3]$$



d) Calcule y[n] do item (c) multiplicando as DFT's de x[n] e h[n] e realizando uma DFT inversa.

Y[k] = X[k].H[k]

$$Y[k]=\left[1-e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}\right].\left[1+2e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+4e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}+8e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}\right]$$

$$Y[k]=1+\left(1.2e^{-j\frac{2\pi}{4}1.k}\right)+\left(1.4e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}\right)+\left(1.8e^{-j\frac{2\pi}{4}3.k}\right)+\left(-e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}.1\right)+\left(-e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}.2e^{-j\frac{2\pi}{4}1.k}\right)+\left(-e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}.4e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}\right)+\left(-e^{-j\frac{2\pi}{4}2.k}.8e^{-j\frac{2\pi}{4}3.k}\right)$$

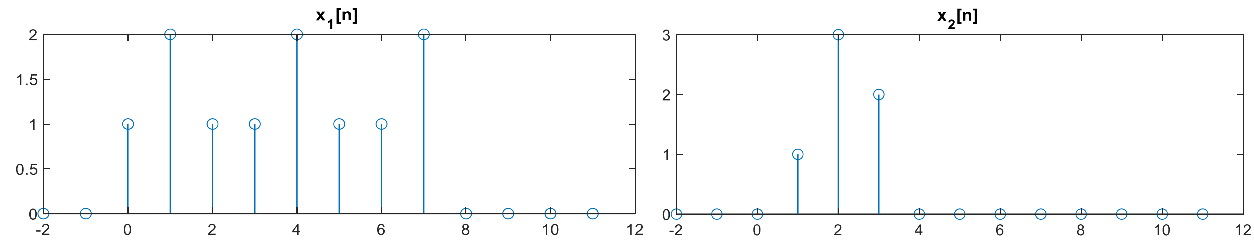
$$Y[k]=1+2e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+4e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}+8e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}-e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}-2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}-4e^{-j\frac{2\pi}{4}4k}-e8^{-j\frac{2\pi}{4}5k}$$

$$Y[k]=1+2e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+4e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}+8e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}-e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}-2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}-4-8e^{-j\frac{2\pi}{4}k}$$

$$Y[k]=-3-6e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+3e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}+6e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

$$Y[k]=-3\delta[n]-6\delta[n-1]+3\delta[n-2]+6\delta[n-3]$$

3) Dois sinais de comprimento finito, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, são esboçados na figura a seguir. Suponha que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sejam nulos fora da região mostrada na figura. Seja $x_3[n]$ a convolução circular de oito pontos de $x_1[n]$ com $x_2[n]$. Determine $x_3[2]$.



- As sequências das figuras acima possuem os seguintes pontos:

$x_1[n]$: 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2

$x_2[n]$: 0, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 0

- Realizando a reflexão temporal em $x_2[n]$, obtém-se as seguintes sequências:

[0] = [0, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 1] → [1] = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 3] → [2] = [3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 2] → [3] = [2, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0] → [4] = [0, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0] → [5] = [0, 0, 2, 3, 1, 0, 0, 0] → [6] = [0, 0, 0, 2, 3, 1, 0, 0] → [7] = [0, 0, 0, 0, 2, 3, 1, 0] → [8] = [0, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 1]

$x_3[0]$ = 1.0 + 2.0 + 1.0 + 1.0 + 2.0 + 1.2 + 1.3 + 2.1 = 2 + 3 + 2 = 7

$x_3[1]$ = 1.1 + 2.0 + 1.0 + 1.0 + 2.0 + 1.0 + 1.2 + 2.3 = 1 + 2 + 6 = 9

$x_3[2]$ = 1.3 + 2.1 + 1.0 + 1.0 + 2.0 + 1.0 + 1.0 + 2.2 = 3 + 2 + 4 = 9

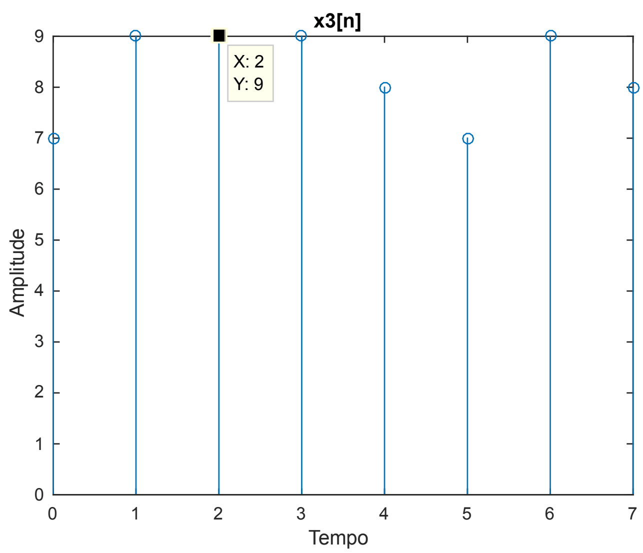
$x_3[3]$ = 1.2 + 2.3 + 1.1 + 1.0 + 2.0 + 1.0 + 1.0 + 2.0 = 2 + 6 + 1 = 9

$x_3[4]$ = 1.0 + 2.2 + 1.3 + 1.1 + 2.0 + 1.0 + 1.0 + 2.0 = 4 + 3 + 1 = 8

$x_3[5]$ = 1.0 + 2.0 + 1.2 + 1.3 + 2.1 + 1.0 + 1.0 + 2.0 = 2 + 3 + 2 = 7

$x_3[6]$ = 1.0 + 2.0 + 1.0 + 1.2 + 2.3 + 1.1 + 1.0 + 2.0 = 2 + 6 + 1 = 9

$x_3[7]$ = 1.0 + 2.0 + 1.0 + 1.0 + 2.2 + 1.3 + 1.1 + 2.0 = 4 + 3 + 1 = 8

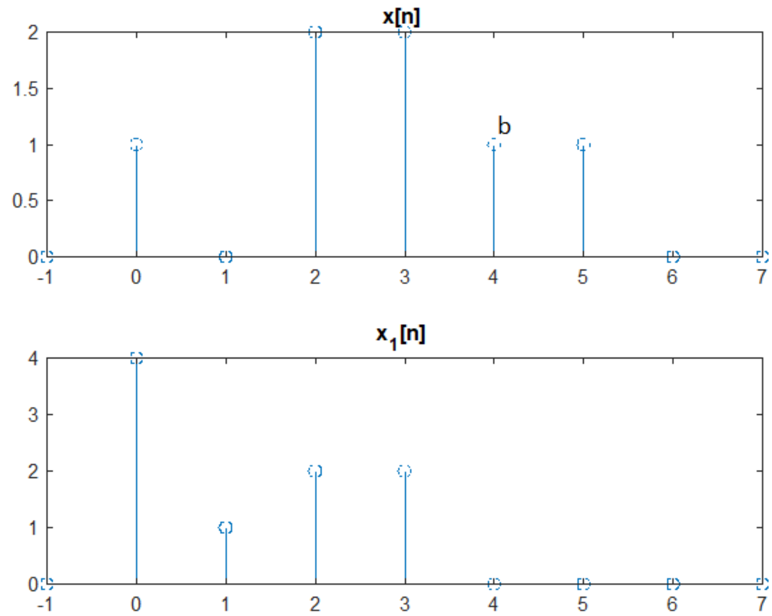


Logo, $x_3[2]$ = 9

4) Na Figura a seguir é mostrada uma sequência de tempo discreto com seis pontos x[n]. Suponha que x[n] = 0 fora do intervalo mostrado. O valor de x[4] não é conhecido e é representado como b. Observe que a amostra mostrada como b na figura não está necessariamente na escala. Sejam $X(e^{j\omega})$ a TFTD de x[n] e $X_1[k]$ as amostras de $X(e^{j\omega})$ a cada π/2, isto é,

$$X_1[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{k\pi}{2}},\ 0 \leqslant k \leqslant 3$$

A sequência com quatro pontos $x_1[n]$ que resulta da inversa com quatro pontos de $X_1[k]$ é mostrada a seguir. Com base nessa figura, você pode determinar b de modo único? Caso afirmativo, dê esse valor de b.



Sendo x[n]:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + b\,\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

Fazendo a DFT de X[k]:

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = e^{j\frac{2\pi}{4}k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} + be^{-j\frac{2\pi}{4}4k} + e^{-j\frac{2\pi}{4}5k}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} + be^{-j\frac{2\pi}{4}0k} + e^{-j\frac{2\pi}{4}k}$$

$$X\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} + b + e^{-j\frac{2\pi}{4}k}$$

Sendo $x_1[n]$:

$$x[n] = 4\,\delta[n] + \delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] + 2\,\delta[n-3]$$

Fazendo a DFT de $X_1[k]$:

$$X_1\left[e^{j\frac{2k\pi}{4}}\right] = 4 + e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

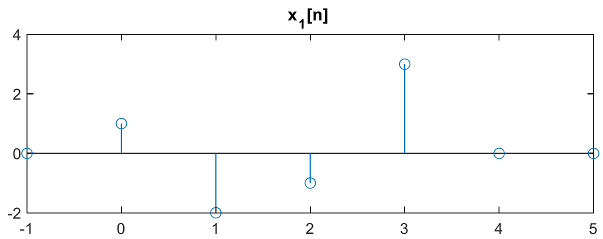
Substituindo em $X_1[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{k\pi}{2}}$:

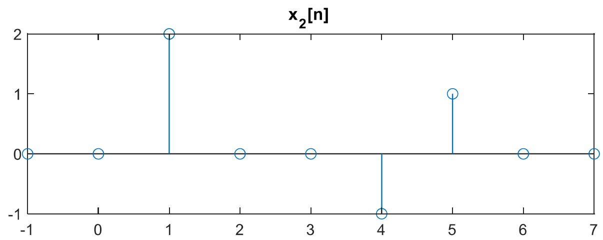
$$X_1[k] = X(e^{j\omega}) \rightarrow 4 + \cancel{e^{-j\frac{2\pi}{4}k}} \cancel{+2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}} \cancel{+2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}} = 1 \cancel{+2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}} \cancel{+2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}} + b + \cancel{e^{-j\frac{2\pi}{4}k}}$$

b = 4 - 1 = 3

b = 3

5) Na figura a seguir são mostradas duas sequências de comprimento finito $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Qual é o menor N tal que a convolução circular de N pontos de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ seja igual à convolução linear dessas sequências.



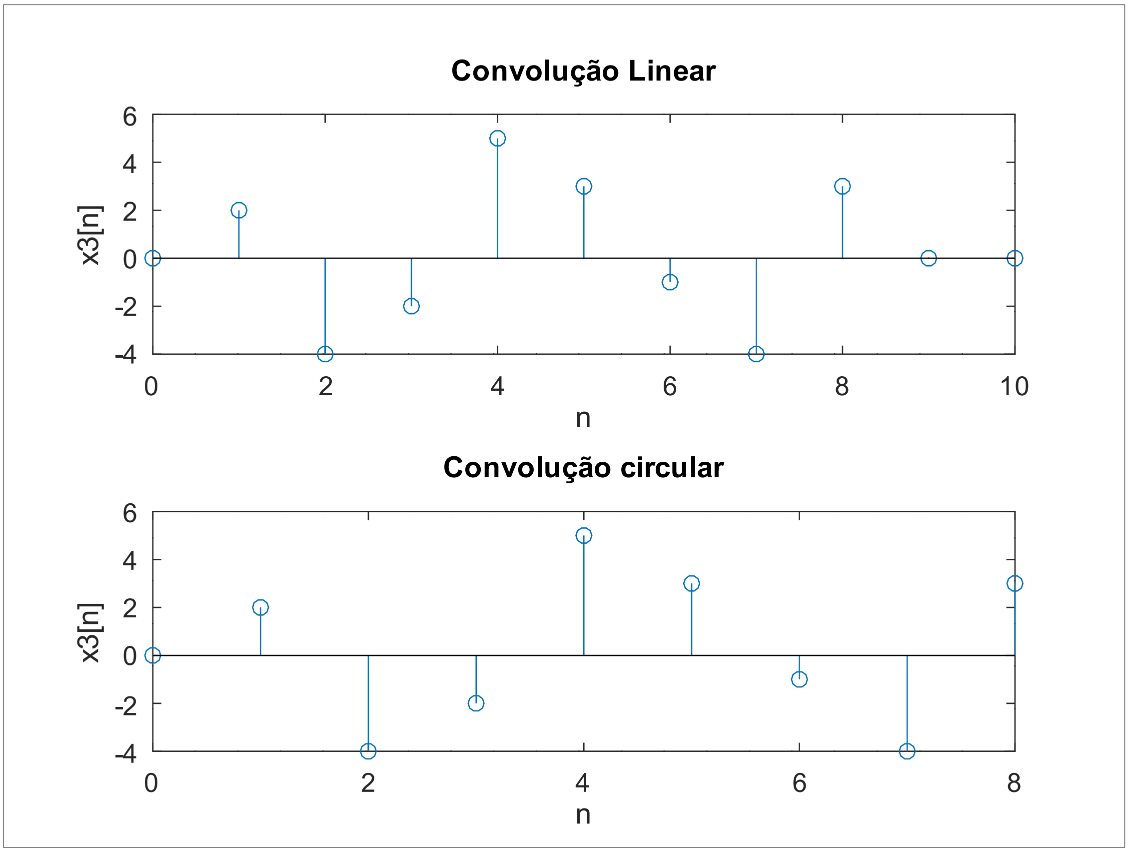


- Das figuras acima, obtém-se os seguintes pontos:

$x_1[n]$ = [1, -2, -1, 3, 0, 0]

$x_2[n]$ = [0, 2, 0, 0, -1, 1]

Convolução linear vs circular:



Dessa forma, é possível obter as seguintes janelas:

$x_1[n]$ = [1 -2 -1 3], $N_1 = 4$

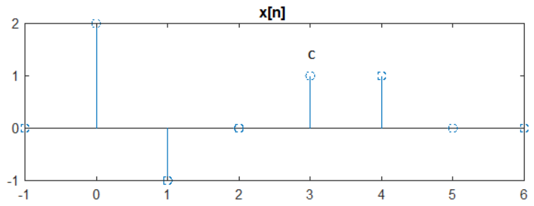
$x_2[n]$ = [0 2 0 0 -1 1], $N_2 = 6$

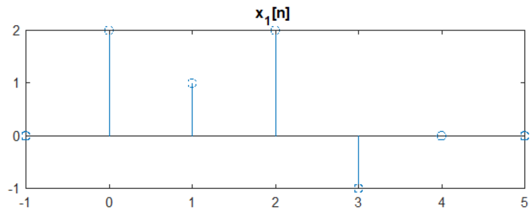
$N = N_1 + N_2 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$

6) Na figura a seguir é mostrada uma sequência x[n] para a qual o valor de x[3] é uma constante desconhecida c. O valor da amostra com amplitude c não está necessariamente representada na escala. Considere:

$$X_1[k]=X[k]e^{j\frac{2\pi}{5}3k}$$

Sendo X[k] a DFT de cinco pontos de x[n]. A sequência x1 [n]é a DFT inversa de X 1 [k]. Qual o valor de c?





Multiplicando ambos os lados por $e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}$

$$e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}.X_1[k]=X[k]$$

Sendo $x_1[n]$:

$$x_1[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]+2\delta[n-2]-\delta[n-3]$$

Fazendo a DFT de $X_1[k]$

$$X_1[k]=2e^{-j\frac{2\pi}{5}0.k}+e^{-j\frac{2\pi}{5}1.k}+2e^{-j\frac{2\pi}{5}2.k}-e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}$$

$$X_1[k]=2+e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+2e^{-j\frac{2\pi}{5}2k}-e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}$$

Sendo x[n]

$$x[n]=2\delta[n]-\delta[n-1]+c\delta[n-3]+\delta[n-4]$$

Fazendo a DFT de X[k]

$$X[k]=2-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k}+e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}$$

Substituindo na equação

$$e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}.X_1[k]=X[k]\rightarrow\left(e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right).\left(2+e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+2e^{-j\frac{2\pi}{5}2k}-e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right)=2-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k}+e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}$$

$$\left(e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right).\left(2+e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+2e^{-j\frac{2\pi}{5}2k}-e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right)=2-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k}+e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}$$

$$\left(e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}.2\right)+\left(e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}.e^{-j\frac{2\pi}{5}1.k}\right)+\left(e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}.2e^{-j\frac{2\pi}{5}2.k}\right)-\left(e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}.e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}\right)=2-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k}+e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}$$

$$2e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}+e^{-j\frac{2\pi}{5}4.k}+2e^{-j\frac{2\pi}{5}5.k}-e^{-j\frac{2\pi}{5}6.k}=2-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k}+e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}$$

$$2e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}\cancel{+e^{-j\frac{2\pi}{5}4.k}}\cancel{+2}\cancel{-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}}\cancel{=2-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}}+ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\cancel{+e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}}$$

$$2e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}=ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\rightarrow c=\frac{2e^{-j\frac{2\pi}{5}3.k}}{e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}}\rightarrow c=2$$

Portanto, c = 2.