Instituto Federal de Santa Catarina

Engenharia em telecomunicações

Sinais e Sistemas I

Análise de sinais no domínio do tempo: A série de Fourier

Profa. Deise Monquelate Arndt

São José, junho de 2016

Série trigonométrica Compacta

- Quando x(t) é real a série trigonométrica de Fourier pode ser expressa na forma compacta.

$$x(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n w_0 t+\theta_n)$$

- onde: $C_0=a_0$

$$C\cos(w_0 t+\theta)=C\cos\theta\cos w_0 t-C\,sen\,\theta\,sen\,w_0 t$$

$$a=C\cos\theta, \qquad b=-C\,sen\,\theta$$

$$C\cos(w_0 t+\theta)=a\cos w_0 t+b\,sen\,w_0 t$$

$$C=\sqrt{(a^2+b^2)}, \qquad \theta=\arctan\left(\frac{-b}{a}\right)$$

Série trigonométrica Compacta

- Os coeficientes da série compacta são obtidos da série trigonométrica a partir das seguintes relações:

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{\left(a_n^2 + b_n^2\right)}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Espectro da Série Compacta

- A partir da série compacta é possível traçar o espectro de frequência da expansão e série de Fourier.
  - O espectro é composto por dois gráficos:
    - $C_n x\, w = n w_0$ → Espectro de amplitude
    - $\theta_n x\, w = n w_0$ → Espectro de fase
- O espectro de frequência nos permite verificar a contribuição de cada harmônica no sinal periódico x(t);
- O sinal x(t) é uma representação no domínio do tempo, o espectro do sinal é o seu equivalente no domínio da frequência.

Resolver:

Exemplos 6.1 a 6.4

Exercício E6.1. E6.2

Série exponencial de Fourier

- A partir da forma de Euler, sabemos:

$$\cos n w_0 t = \frac{e^{jnw_0 t} + e^{-jnw_0 t}}{2}, \qquad \sin n w_0 t = \frac{e^{jnw_0 t} - e^{-jnw_0 t}}{2j}$$

- Desta forma, x(t) pode ser expresso através da forma exponencial, dada por:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_n e^{jnw_o t}$$

Série exponencial de Fourier

- Onde D_n é calculada da seguinte forma:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jnw_0 t}\, dt$$

- A relação com a série compacta se dá através das expressões:

Componente continua $$D_0 = C_0 = a_0$$

Modulo $$|D_n| = |D_n| = \frac{C_n}{2},\ \ n \neq 0$$

Fase $$D_n^0 = \theta_n,\ \ D_{-n} = -\theta_n,\ \ n \neq 0$$

Espectro da Série exponencial

- A partir da série exponencial é possível traçar o espectro de frequência da expansão em série de Fourier.

  - O espectro é composto por dois gráficos:

    - $\left|D_n\right| \;\; x \;\; w = n w_0$ → Espectro de amplitude (função par)
    - $D_n^o \;\; x \;\; w = n w_0$ → Espectro de fase (função ímpar)

- O espectro de frequência da série exponencial possui tanto frequências negativas quanto positivas

Existência da S.F.

- Para as séries de Fourier existir os valores de $a_{0,} a_n e\, b_n$ precisam ser finitos.

- Para que isto ocorra, x(t) deve ser absolutamente integrável dentro de um período, ou seja:

$$\int_{T_0} \left| x\left(t\right) \right| dt \leq \infty$$

Convergência da S.F.

- O critério de convergência usado nas séries de Fourier é a chamada convergência na média.
- Consideramos uma série infinita para um sinal periódico x(t) e sua versão "truncada" (aproximada) $x_N(t)$ dada por:

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \qquad x_N(t)=\sum_{n=1}^{N} Z_n(t)$$

- O erro de aproximação devido ao truncamento é dado por:

$$e(t)=x(t)-x_N(t)$$

Resolver:
Exemplos 6.5 a 6.7
Exercícios: E6.4, E6.5,E6.6

Convergência da S.F.

- A série converge na média no intervalo de um período se:

$$\int_0^{T_0} \left|e(t)^2\right| dt = \int_0^{T_0} \left|x(t) - x_N(t)^2\right| dt \rightarrow 0 \quad se \quad N \rightarrow \infty$$

- Ou seja, a energia do erro em um período tende a zero quando N tende a infinito.
- Um critério mais simples para a convergência na média é verificar se o sinal tem energia finita em um período. Um sinal periódico x(t) possui uma série de Fourier que convirja na media se:

$$\int_{T_0} \left|x(t)\right|^2 dt \leq \infty$$

Convergência da S.F.

- Além da convergência na média é interessante avaliar a convergência em pontos específicos.
- Se um sinal periódico x(t) satisfizer as três condições de *Dirichlet* descritas abaixo, então a série converge para todo ponto em que o sinal é contínuo e converge para o valor médio dos dois lados da descontinuidade nos pontos de descontinuidade:
  - x(t) absolutamente integrável
  - Há um número finito de descontinuidades finitas em um período
  - Há um número finito de máximos e mínimos em um período.

Fenômeno de Gibbs

- Ocorre quando o sinal periódico x(t) apresenta descontinuidades.
- Ao considerarmos uma série de Fourier truncada, há a presença de um sobressinal com amplitude de aproximadamente 9% do valor da descontinuidade nas vizinhanças dos pontos de descontinuidade