Instituto Federal de Santa Catarina

Engenharia em telecomunicações

Sinais e Sistemas I

Análise de sinais no domínio do tempo: A série de Fourier

Profa. Deise Monquelate Arndt

São José, junho de 2016

Série de Fourier

- A análise de Fourier (séries e transformadas) é utilizada na análise de sinais;
- Na série de Fourier um sinal periódico é representado como a soma de senoides (ou exponenciais) de várias frequências
  - As séries de Fourier são utilizadas na análise de sinais periódicos, contínuos ou discretos;
  - A transformada de Fourier pode ser utilizada na análise de sinais periódicos e aperiódicos, contínuos ou discretos.

Outras transformadas:

- Transformada de Laplace → Utilizada em tempo contínuo. Trata-se da representação espectral em exponenciais ou senoides de frequência complexa.
- Transformada Z → utilizada em tempo discreto. Trata-se da representação espectral em exponencial em tempo discreto

Sinal periódico

- Seja um sinal x(t) periódico com período t_0, ou seja,

  $$x(t+t_0)=x(t), \quad \forall t$$

- O menor valor de t_0 é chamado de período fundamental de x(t);
  - Define-se ainda:
    - $f_0=\frac{1}{t_0}$ → Frequência fundamental em hertz (Hz)
    - $w_0=\frac{2\pi}{t_0}=2\pi f_0$ → Frequência fundamental em radianos por segundo (rad/s)

Harmônicas

- Senoides com frequências múltiplas da frequência fundamental são denominadas harmônicas do sinal.
  - Exemplo:
    - $\cos(w_0 t) = \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow Primeria\, harmônica$
    - $\cos(2 w_0 t) = \cos(4\pi f_0 t) \rightarrow Segunda\, harmônica$
    - $\cos(10 w_0 t) = \cos(20\pi f_0 t) \rightarrow Décima\, harmônica$
    - $\cos(n w_0 t) = \cos(n 2\pi f_0 t) \rightarrow n - ésima\, harmônica$

Representações da S. F.

- As séries de Fourier (S.F.) possuem três representações:
  - Série trigonométrica em seno e cosseno
  - Série trigonométrica compacta e cosseno
  - Série exponencial

- Para as duas últimas pode-se representar o espectro em frequência do sinal periódico

Série trigonométrica

- Fourier mostrou que um sinal periódico x(t) pode ser decomposto em:

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n w_0 t)+b_n \sin(n w_0 t)$$

- Assim, um sinal periódico pode ser representado como a soma de uma constante (componente contínua – DC) e de infinitas harmônicas;
- Para decompor um sinal através da série trigonométrica de Fourier precisamos determinar os valores dos coeficientes

$a_{0,} a_n e\, b_n$

Série trigonométrica

- Para se obter a_0, integra-se em um período a expressão:

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n w_0 t)+b_n \sin(n w_0 t)$$

$$\int_{T_0} x(t)\,dt=a_0\int_{T_0} dt+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{T_0} \cos(n W_{0t})\,dt+b_n\int_{T_0} \cos(n W_{0t})\,dt]=a_0 T_0$$

$$\int_{T_0} x(t)\,dt= \quad a_o\int_{T_0} dt= \quad a_o T_0$$

$$a_o=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt$$

Série trigonométrica

- Para se obter $a_0 \;\; e \;\; b_n$:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} xd(t) \cos n w_0 t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} xd(t) \, sen \, n w_0 t \, dt$$

$$w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Série trigonométrica

- Assim a série trigonométrica é dada por:

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n w_0 t)+b_n \sin(n w_0 t)$$

- Sendo:

$$a_o=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt$$

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} xd(t)\cos n w_0 t\,dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} xd(t)\,sen\, n w_0 t\,dt$$

Simetrias

- Se x(t) é um sinal par:

$$a_o = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt = \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n w_0 t\,dt = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos n w_0 t\,dt \quad ou \quad seja$$

$$a_n = \frac{4}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)\cos n w_0 t\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} xd(t)\,sen\, n w_0 t\,dt \quad \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,sen\, n w_0 t\,dt = 0$$

Simetrias

- Se x(t) é um sinal ímpar:

$$a_o = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n w_0 t\,dt = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos n w_0 t\,dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} xd(t)\,sen\,n w_0 t\,dt \quad \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,sen\,n w_0 t\,dt$$

$$b_n = \frac{4}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t)\,sen\,n w_0 t\,dt$$

Resolver exemplo 6.1 Utilizando a série trigonométrica