Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Instituto Federal de Santa Catarina

Campus São José

Área de Telecomunicações

ELM20704 – Eletromagnetismo

Avaliação Teórica – Magnetostática

Data: 06/10/2014

Gabarito

Nos problemas a seguir, <u>não esqueça</u> de indicar <u>as unidades</u> das grandezas escalares e vetoriais!

Responda na própria folha ou no verso da folha.

1) A Figura 1 mostra uma partícula de carga elétrica $Q = 50\,nC$ em movimento, cuja magnitude da velocidade é $|\boldsymbol{v}| = 1 \times 10^8\ m/s$. A carga acaba de entrar na região onde existe um campo magnético com densidade de fluxo de intensidade $|\mathbf{B}| = 2\ \mathrm{mT}$.

As direções de campo e velocidade estão indicadas na Figura.

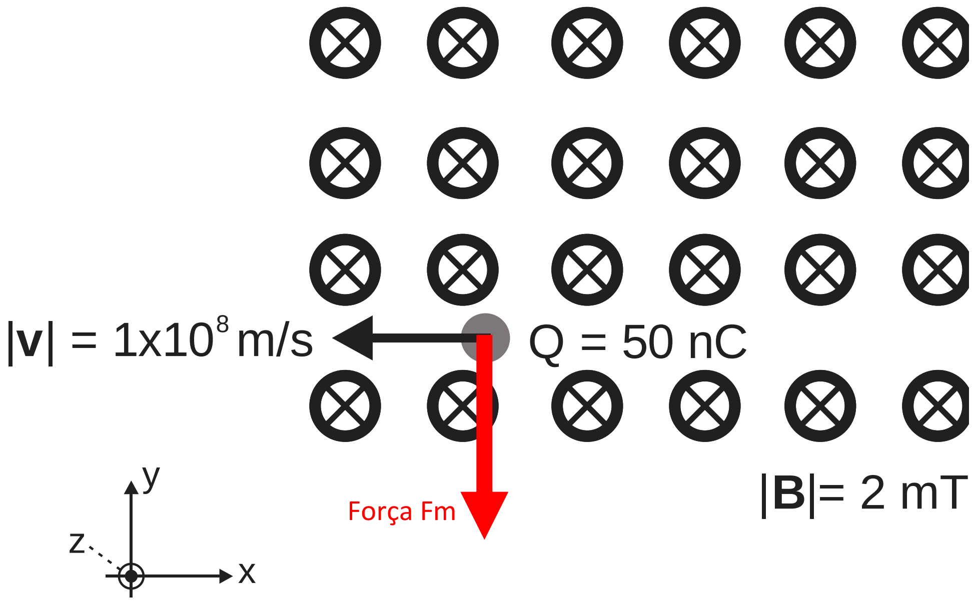


Figura 1

(eixo Z: sentido crescente saindo do plano da folha)

Encontre:

a) Escreva $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{B}$ na forma vetorial. . $\mathbf{v} = -10^8\mathbf{a}_x\ (\mathrm{m/s}),\ \mathbf{B} = -2\mathbf{a}_z\ (\mathrm{mT})$

b) Calcule intensidade da força resultante $\mathbf{F}$ sobre a carga Q ao entrar no campo magnético (instante indicado na Figura 1). Indique a direção da força com uma seta sobre a carga. . $|\mathbf{F}| = Q|\mathbf{v}||\mathbf{B}|\sin(\pi/2) = 50n2m\frac{1G}{10} = 10\ \mathrm{mN}$

c) Escreva a força calculada no item (b) na forma vetorial. $\mathbf{F} = -10\mathbf{a}_y\ \mathrm{mN}$

d) Encontre um vetor unitário que aponta na direção da força do item (c). $\mathbf{a_F} = -\mathbf{a}_y$

e) Suponha que a carga está se movendo na direção indicada pela Figura 1 devido a ação de um campo elétrico constante $\mathbf{E_1} = -100\mathbf{a}_\mathrm{x}\ \mathrm{V/m}$. Escreva a equação da Lei de Lorentz e calcule a força resultante.

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = Q\mathbf{E} + \mathbf{F} = -5 \times 10^{-6}\mathbf{a}_x - 10 \times 10^{-3}\mathbf{a}_y \quad (\mathrm{N})$$

f) Para que a carga continue se movendo na direção da Figura 1, podemos cancelar o efeito do campo magnético utilizando um outro campo elétrico externo $\mathbf{E}_2$. Qual seria o valor desse campo, na forma vetorial? Escreva a Lei de Lorentz considerando $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$.

$$\mathrm{Q}\mathbf{E}_2 = -\mathbf{F}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{+10 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-9}} \mathbf{a}_y = +200 \mathbf{a}_y \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$$

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = \mathrm{Q}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) + \mathbf{F} = -5 \times 10^{-6} \mathbf{a}_x + \underbrace{\underbrace{50 \times 10^{-9} \times 200 \times 10^{3}}_{10\times10^{-3}} \mathbf{a}_y - 10 \times 10^{-3} \mathbf{a}_y}_{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = \mathrm{Q}\mathbf{E}_1 = -5 \mathbf{a}_x \, \mu\mathrm{N}$$

2) Suponha a equação que descreve o campo magnético gerado por uma corrente elétrica atravessando um caminho fechado seja $\mathbf{H} = 8x\mathbf{a}_y - 6z\mathbf{a}_x$ A/m.

a. Calcule a densidade de corrente nesse caminho, na forma vetorial.

b. Assuma que a densidade de corrente do item (a) é uniforme em um condutor de cobre de seção circular. Para uma corrente de 50 μA, qual área de condutor resultaria na densidade de corrente do item (a)?

c. Qual a intensidade de campo elétrico capaz de gerar a densidade de corrente elétrica do item (a) em um condutor de cobre? Assuma a condutividade elétrica do cobre $5{,}96 \times 10^7 \mathrm{S/m}$ (Siemens/metro).

d. Assuma o campo elétrico encontrado no item (c) uniformemente distribuído ao longo do condutor de cobre. Qual o comprimento desse condutor caso a diferença de potencial que gera o campo elétrico seja de 0,5 μVolts?

a)

$$\mathbf{J} = \mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(8x\mathbf{a}_y - 6z\mathbf{a}_x \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{H}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\mathrm{x} & \mathbf{a}_\mathrm{y} & \mathbf{a}_\mathrm{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{H_x} & \mathrm{H_y} & \mathrm{H_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\mathrm{x} & \mathbf{a}_\mathrm{y} & \mathbf{a}_\mathrm{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ -6\mathrm{z} & 8\mathrm{x} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{H}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{H_z} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{H_y}\right)\mathbf{a_x} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{H_x} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{H_z}\right)\mathbf{a_y} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{H_y} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{H_x}\right)\mathbf{a_z}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{H}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(-6\mathrm{z})\right)\mathbf{a_y} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(8\mathrm{x})\right)\mathbf{a_z}$$

$$\mathbf{J} = \mathrm{rot}(\mathbf{H}) = -6\mathbf{a_y} + 8\mathbf{a_z} \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

b)

$$|\mathbf{J}| = |6\mathbf{a_y} + 8\mathbf{a_z}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{A}} = \frac{50\mu\mathrm{A}}{\mathrm{A}\ (\mathrm{m}^2)} = 10 \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

$$\mathrm{A}\ (\mathrm{m}^2) = \frac{50}{10} \times 10^{-6} = 5\ \mathrm{mm}^2$$

c)

$$|\mathbf{J}| = \sigma|\mathbf{E}|$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{|\mathbf{J}|}{\sigma} = \frac{10\ \mathrm{A/m^2}}{5{,}96 \times 10^7 \mathrm{S/m}} = 167{,}8523 \frac{\mathrm{nV}}{\mathrm{m}}$$

d)

$$|\mathbf{E}| = \frac{\Delta V}{d} \rightarrow d = \frac{\Delta V}{|\mathbf{E}|} = \frac{0,5 \times 10^{-6}}{167,8523 \times 10^{-9}} \left[\frac{V}{V/m}\right] = 2,98 \text{ m}$$

3) Considere o circuito magnético da Figura 2. Assuma que a permeabilidade do material é $\mu_r = 600$ e que todos os trechos do material possuem a mesma profundidade. Assuma $\mu_r^{(ar)} = 1$ para o *gap*.

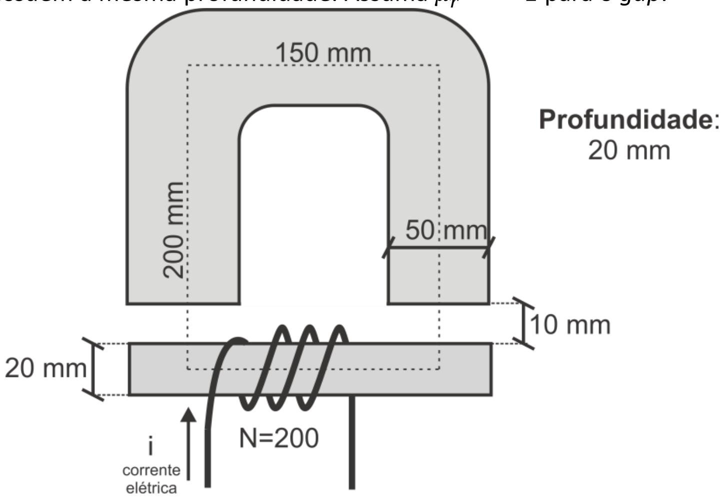


Figura 2

a) Desenhe o circuito equivalente magnético.

b) Encontre o valor das relutâncias envolvidas no circuito magnético. **Qual é a maior relutância? Justifique.**

$$\frac{\mathcal{R}_{ar}}{2} = \frac{l_{ar}}{\mu_r \mu_0 A_1} = \frac{10}{4\pi 10^{-7} \times 50 \times 20 \times 10^{-6}} = 7,9577471 \left[G \frac{A}{Wb}\right]$$

$$\mathcal{R}_{ar} = 15,91549 \left[G \frac{A}{Wb}\right]$$

$$\mathcal{R}_{mat1} = \frac{l_{mat_1}}{\mu_r \mu_0 A_1} = \frac{(200 + 200 + 150 - 10 - 10)}{600 \times 4\pi 10^{-7} \times 50 \times 20 \times 10^{-6}} = 0,7029343 \left[G \frac{A}{Wb}\right]$$

$$\mathcal{R}_{mat2} = \frac{l_{mat_2}}{\mu_r \mu_0 A_2} = \frac{150}{600 \times 4\pi 10^{-7} \times 20 \times 20 \times 10^{-6}} = 0,4973591 \left[G \frac{A}{Wb}\right]$$

A maior relutância é a relutância do ar, pois o material é ferromagnético ($\mu_r \gg 1$).

c) Calcule o fluxo magnético ϕ gerado pela fonte de força magnetomotriz se a corrente é de $I = 85.5789\ A$

$$\phi = \frac{\mathfrak{F}}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{\overbrace{NI}^{200\times}}{\underbrace{\mathcal{R}_{ar} + \mathcal{R}_{mat1} + \mathcal{R}_{mat2}}_{17,1157834 \times 10^9}} \cong 1\ \mu\text{Wb}$$

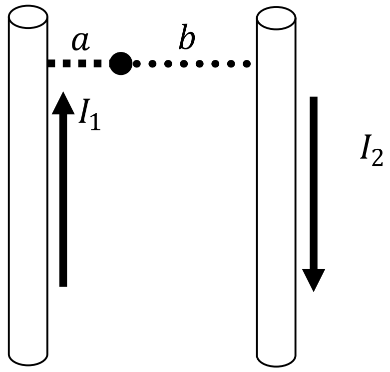
d) Qual a densidade de fluxo $\mathbf{B}$ magnético no *gap* de ar?

$$\mathbf{B} = \frac{\phi}{A} = \frac{1\ \mu\text{Wb}}{50 \times 20 \times 10^{-6}} = 1\ m\text{T} = 1\ m\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

e) Calcule a indutância resultante do enrolamento que gerou o fluxo do item (c).

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{200 \times 1\ \mu\text{Wb}}{85.5789} = 2,337\ \mu\text{H}$$

4) Dois condutores infinitamente longos estão colocados na figura a seguir:



Seja C o ponto indicado na figura, esse está posicionado a uma distância perpendicular de a metros do primeiro condutor e b metros do segundo condutor, os quais são percorridos pelas correntes I_1 e I_2, respectivamente. Encontre:

a) A densidade de fluxo magnético $|\mathbf{B_1}|$ no ponto C devido a corrente I_1.

Indique na figura o sentido do campo magnético devido a essa corrente.

$$|\mathbf{B}|_1 = \mu \frac{I}{2\pi d} = \frac{\mu |I_1|}{2\pi a} \quad \mathrm{T} \text{ (entrando X)}$$

b) A densidade de fluxo magnético $|\mathbf{B_2}|$ no ponto C devido a corrente I_2.

Indique na figura o sentido do campo magnético devido a essa corrente.

$$|\mathbf{B}|_2 = \mu \frac{I}{2\pi d} = \frac{\mu |I_2|}{2\pi b} \quad \mathrm{T} \text{ (entrando X)}$$

c) A densidade de fluxo magnético $|\mathbf{B}|$ resultante no ponto C.

Indique na figura o sentido do campo magnético resultante.

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}|_1 + |\mathbf{B}|_2 = \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{|I_1|}{a} + \frac{|I_2|}{b}\right) \quad \mathrm{T}$$

d) Suponha $I_1 = 1\ m\mathrm{A}$, $I_2 = 1\ \mathrm{A}$, $a = 1\ \mathrm{cm}\ \mathrm{b} = 0{,}5\ \mathrm{cm}$.

Calcule numericamente os itens de a) até c) e analise os resultados.

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{10^{-3}}{1 \times 10^{-2}} + \frac{1}{5 \times 10^{-3}}\right) = \frac{\mu}{2\pi}(1000 + 2) = \frac{2001}{20\pi}\mu\mathrm{T}$$

O campo gerado pela corrente 2 é muito mais influente que o campo gerado pela corrente 1.
O segundo condutor coloca o primeiro sob um campo magnético aproximadamente constante, o que gera uma força de repulsão sobre o condutor 1 através da interação do campo $|\mathbf{B}|_2$ com corrente I_1.

5) Conceitue as seguintes definições de densidade para diferentes grandezas físicas e escreva uma equação para representar a medida, conforme o exemplo do item (a). Não esqueça de definir as unidades.

a. **Densidade demográfica:**

Relação do número de habitantes por unidade de superfície do território.

$$D = \frac{N}{A} \qquad \left(\frac{nº\ de\ hab.}{km^2}\right)$$

b. **Densidade de corrente elétrica:**

$$J = \frac{I}{A} \qquad \left(\frac{ampére}{área} = \frac{A}{m^2}\right)$$

c. **Densidade de fluxo magnético:**

$$B = \frac{\phi}{A} \qquad \left(\frac{Weber}{área} = \frac{Wb}{m^2}\right)$$

d. **Densidade de fluxo elétrico:**

$$D = \frac{\psi}{A} \qquad \left(\frac{Coulomb}{área} = \frac{C}{m^2}\right)$$

e. **Densidade volumétrica de carga elétrica:**

$$\rho_v = \frac{Q_T}{V} \qquad \left(\frac{Coulomb}{volume} = \frac{C}{m^3}\right)$$

f. **Densidade volumétrica de energia magnética:**

$$\frac{W_H}{V} = \frac{1}{2}BH \qquad \left(\frac{Joule}{volume} = \frac{J}{m^3}\right)$$