

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ

Componente Curricular: Sinais e Sistemas 2

Professor: Elen Macedo Lobato

Alunos: Filipi Virgilio, João Pedro Menegali Salvan Bitencourt e Yago Castro Rosa

Turma: 29006

Data: 14/04/2023

Relatório sobre o Laboratório de Amostragem

Tarefas propostas

- Questão 1) Cosseno: 30 Hz, Amostragem: 50 Hz

Código-fonte utilizado:

```
1 % Sinal analógico inicial
2 % (frequência de 30 Hz)
3 [m,t] = makecos(30);
4
5 % Trem de impulso para amostrar o sinal
6 % (frequência de amostragem de 60 Hz)
7 [it1,ts1] = makeimp(60);
8
9 % Amostrando o sinal original
10 ms1 = sampleit1(t,m,ts1);
11
12 % Plotando todos os sinais para visualizar o processo de amostragem
13 c1 = 'r'; % cor para o primeiro cenário
14 smp1_plot(t,m,ts1,it1,ms1,c1);
15
16 % Segundo trem de impulsos
17 % (frequência de amostragem de 50 Hz, menor que a taxa de Nyquist)
18 [it2,ts2] = makeimp(50);
19
20 % Amostrando o sinal original com a nova taxa de amostragem
21 ms2 = sampleit1(t,m,ts2);
22
23 % Plotando todos os sinais para visualizar o processo de amostragem
24 c2 = 'g'; % cor para o Segundo cenário
25 smp1_plot(t,m,ts2,it2,ms2,c2);
26
27 % Reconstrução das duas versões amostradas
28 mr1 = interpsinc(ms1,ts1,t);
29 mr2 = interpsinc(ms2,ts2,t);
30
31 % Plotando o sinal original e o sinal reconstruído para comparar
32 recon_plot(t,m,ts1,ms1,mr1,c1);
33 recon_plot(t,m,ts2,ms2,mr2,c2);
34
35 % Obtendo o espectro para examinar o aliasing
36 % Faça o índice de frequência para plotagem
37 f = (-5000/2):(1/2):(5000/2);
38
39 % Função para calcular o espectro
40 M = am_spectrum(m);
41 MR1 = am_spectrum(mr1);
42 MR2 = am_spectrum(mr2);
43
44 % Plotando o espectro para comparar
45 am_plot(f,M,MR1,MR2,0.02);
```

Com o código acima, gera-se os gráficos abaixo:

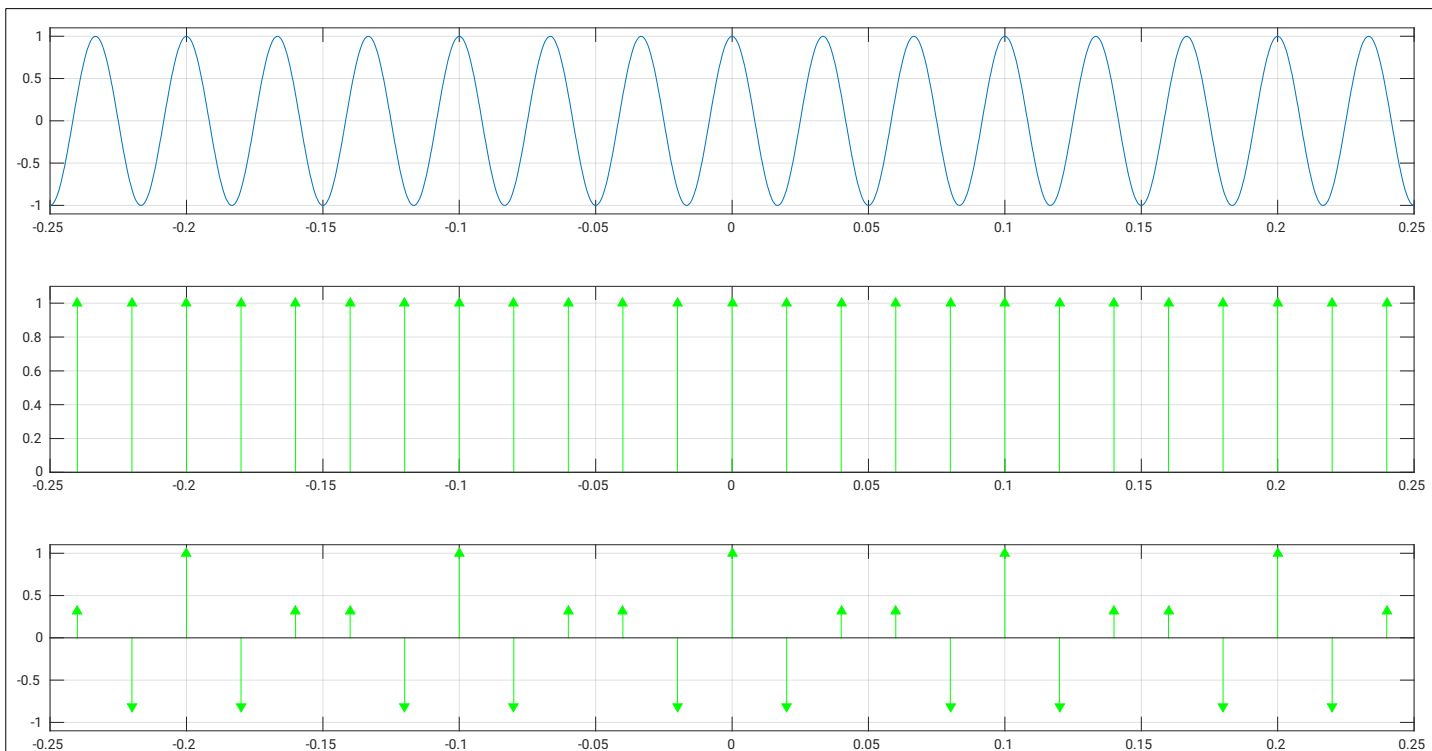


Figura 1: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(60\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal amostrado a 50Hz.

Na Fig. 1 estão representados os trens de impulsos resultantes da amostragem em 50 Hz. Nota-se que há *aliasing*. Abaixo, será mostrada reconstrução do sinal:

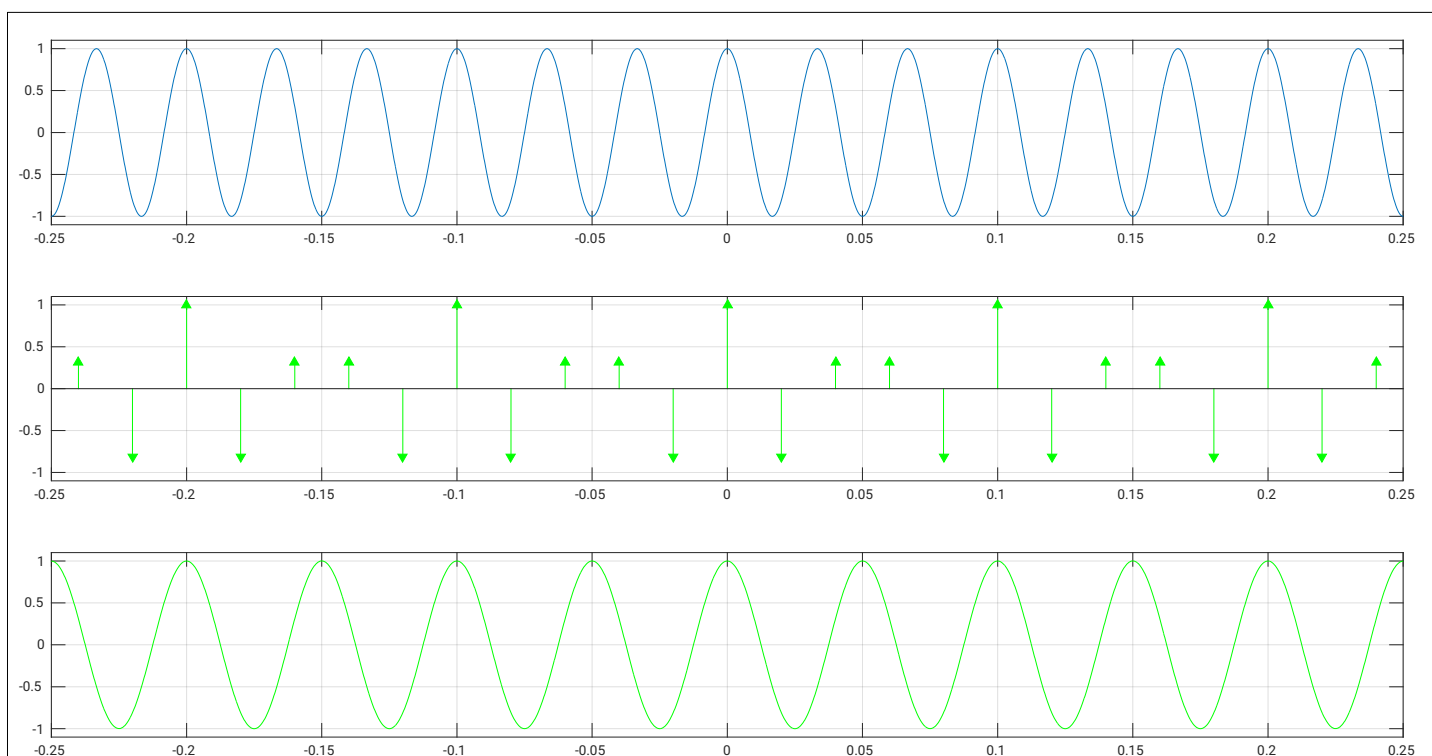


Figura 2: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(60\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal reconstruído.

Na Fig. 2 é possível notar que o sinal reconstruído possui uma frequência menor do que a do sinal original, ou seja, houve perda de informação. A frequência aparente do sinal recuperado pode ser obtida com:

$$f = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ Hz}$$

Com isso, pela taxa de amostragem ter sido menor do que 60 Hz, a frequência do sinal reconstruído é de 20 Hz, contra 30 Hz do sinal original.

Abaixo, será realizada a amostragem respeitando-se a taxa de Nyquist, ou seja, o sinal de 30 Hz será amostrado a 60 Hz:

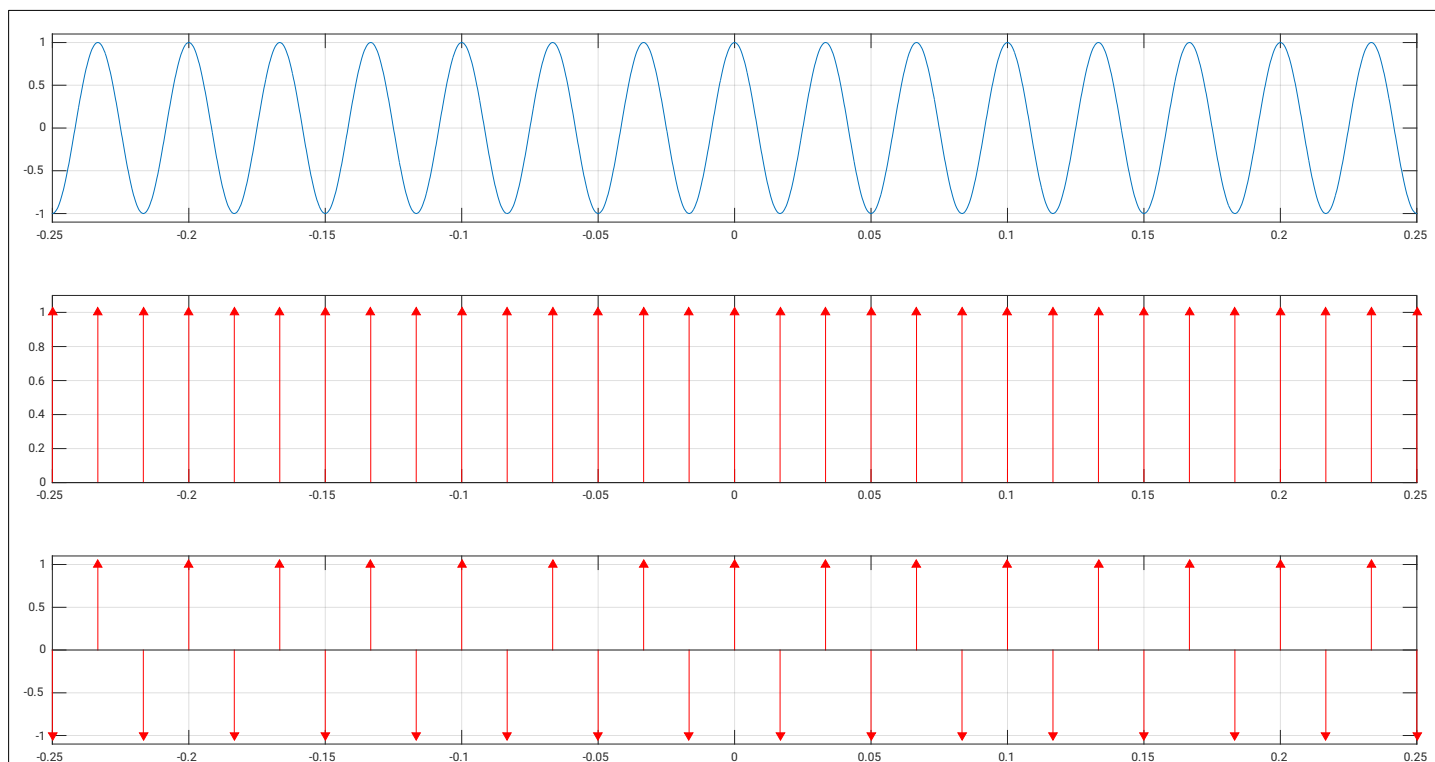


Figura 3: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(60\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal amostrado a 60Hz.

Na reconstrução do sinal obtém-se:

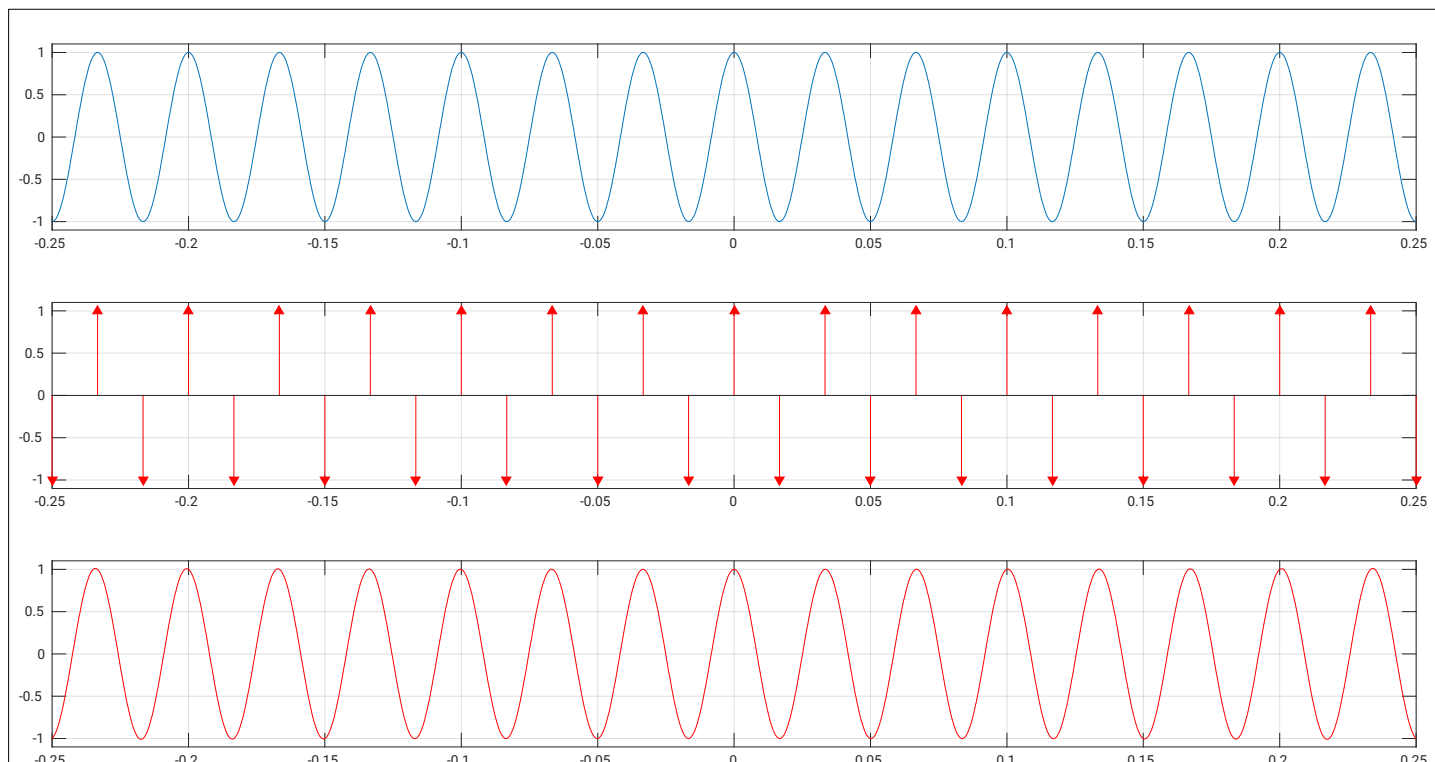


Figura 4: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(60\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal reconstruído.

Na Fig. 4, é possível observar que o sinal pôde ser reconstruído e não houve perda de informação. Também nota-se que, por ser necessário um filtro ideal, a medida que o sinal se afasta da posição temporal 0, o mesmo sofre uma leve alteração na frequência.

Análise teórica

Calculando a transformada de Fourier de $\cos(60\pi t)$ obtém-se:

$$\cos(60\pi t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - 60\pi) + \delta(\omega + 60\pi)]$$

Graficamente, obtém-se:

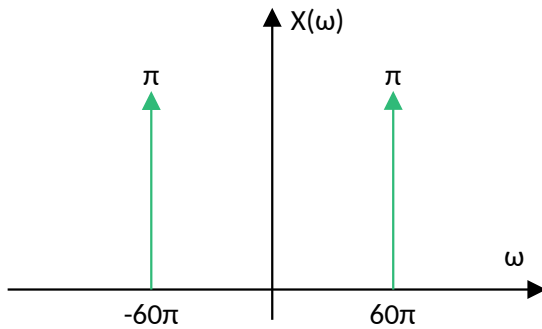


Figura 5: Transformada de Fourier do $\cos(60\pi t)$.

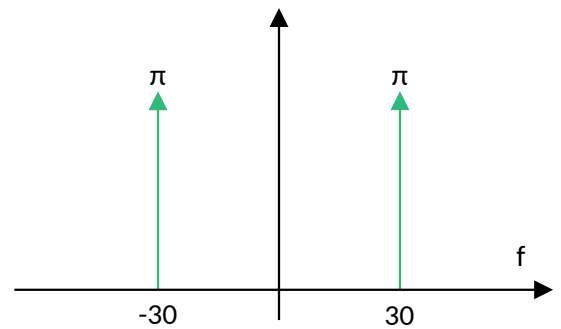


Figura 6: Transformada de Fourier do $\cos(60\pi t)$ dada em Hz.

Dada a taxa de amostragem de 50 Hz ser menor do que a taxa de Nyquist, a frequência aparente deve estar na faixa:

$$-\frac{50}{2} \leq f_a < \frac{50}{2} \quad \text{ou} \quad -25 \leq f_a < 25$$

Calculando-se a mesma, é obtido:

$$f_a = f - mf_s$$

$$f_a = 30 - 1.50 = 30 - 50$$

$$f_a = -20 \text{ Hz}$$

O valor inteiro de m sendo 1 foi suficiente para o cálculo. Graficamente, é possível visualizar essa frequência aparente, observando a sobreposição dos impulsos:

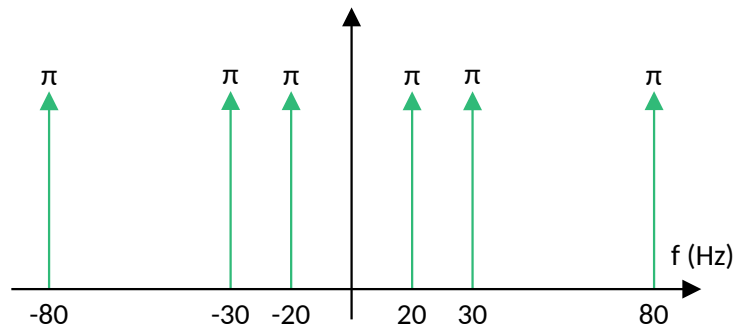


Figura 7: Amostragem do $\cos(60\pi t)$ na taxa de 50 Hz.

Utilizando um filtro passa baixas, um sinal de 20 Hz pode ser recuperado:

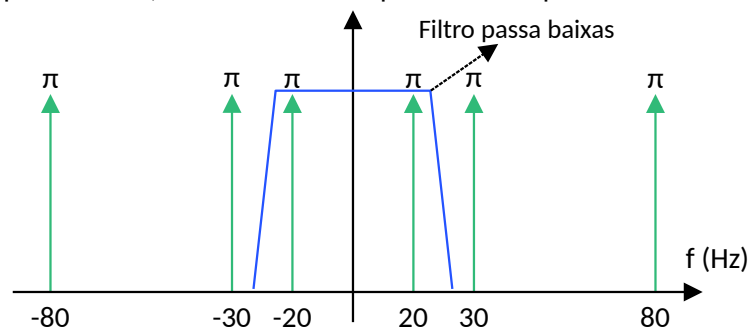


Figura 8: Recuperação do sinal utilizando um filtro passa baixas.

A Fig. 8 mostra que, pela frequência aparente do sinal recuperado ser diferente do sinal original, a informação foi perdida. Já na figura a seguir, será mostrado como seria essa recuperação caso a taxa de Nyquist fosse respeitada:

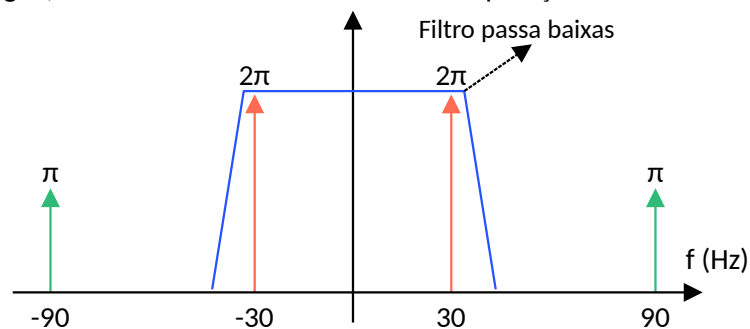


Figura 9: Utilização de um filtro passa baixas para recuperar o sinal $\cos(60\pi t)$, amostrado na taxa de Nyquist.

Na Fig. 9, é mostrado que o sinal original pôde ser reconstruído sem utilizar um filtro ideal. Também é possível observar que o sinal recuperado possui o dobro da amplitude do sinal original. Isso ocorre pela sobreposição exata dos impulsos dos sinais gerados, com os impulsos do sinal original.

- Questão 2) Cosseno: 40 Hz, Amostragem: 15 Hz

Código-fonte utilizado:

```

1 % Sinal analógico inicial
2 % (frequência de 40 Hz)
3 [m,t] = makecos(40);
4
5 % Trem de impulso para amostrar o sinal
6 % (frequência de amostragem de 80 Hz)
7 [it1,ts1] = makeimp(80);
8
9 % Amostrando o sinal original
10 ms1 = sampleit1(t,m,ts1);
11
12 % Plotando todos os sinais para visualizar o processo de amostragem
13 c1 = 'r'; % cor para o primeiro cenário
14 smpl_plot(t,m,ts1,it1,ms1,c1);
15
16 % Segundo trem de impulsos
17 % (frequência de amostragem de 15 Hz, menor que a taxa de Nyquist)
18 [it2,ts2] = makeimp(15);
19
20 % Amostrando o sinal original com a nova taxa de amostragem
21 ms2 = sampleit1(t,m,ts2);
22
23 % Plotando todos os sinais para visualizar o processo de amostragem
24 c2 = 'g'; % cor para o Segundo cenário
25 smpl_plot(t,m,ts2,it2,ms2,c2);
26
27 % Reconstrução das duas versões amostradas
28 mr1 = interpsinc(ms1,ts1,t);
29 mr2 = interpsinc(ms2,ts2,t);
30
31 % Plotando o sinal original e o sinal reconstruído para comparar
32 recon_plot(t,m,ts1,ms1,mr1,c1);
33 recon_plot(t,m,ts2,ms2,mr2,c2);
34
35 % Obtendo o espectro para examinar o aliasing
36 % Faça o índice de frequência para plotagem
37 f = (-5000/2):(1/2):(5000/2);
38
39 % Função para calcular o espectro
40 M = am_spectrum(m);
41 MR1 = am_spectrum(mr1);

```

```

42 MR2 = am_spectrum(mr2);
43
44 % Plotando o espectro para comparar
45 am_plot(f,M,MR1,MR2,0.02);

```

Os gráficos gerados pela ferramenta Matlab são:

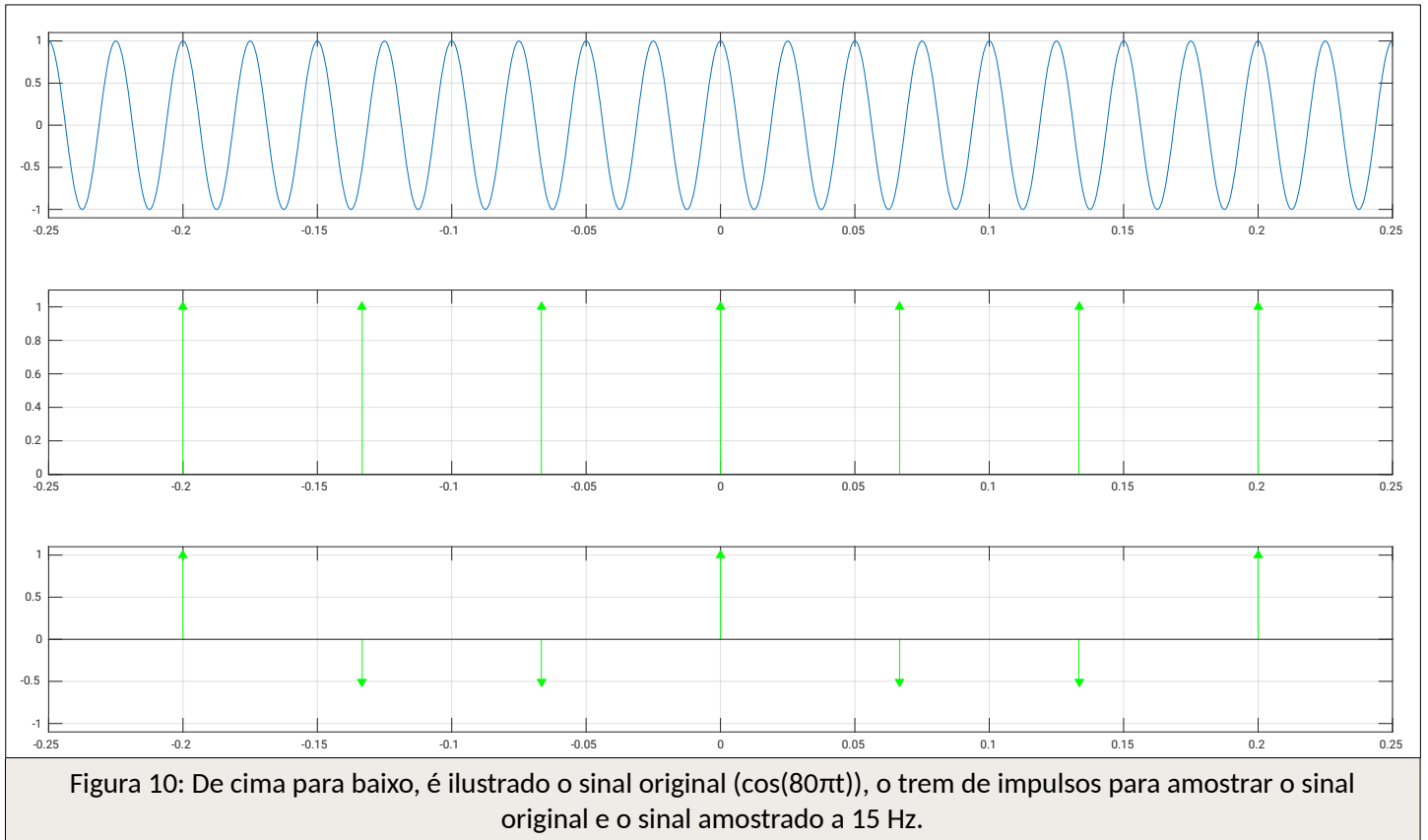


Figura 10: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(80\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal amostrado a 15 Hz.

Na Fig. 10, é possível notar que o trem de impulsos resultante causará *aliasing* no sinal que será reconstruído, conforme pode ser visualizado na figura a seguir:

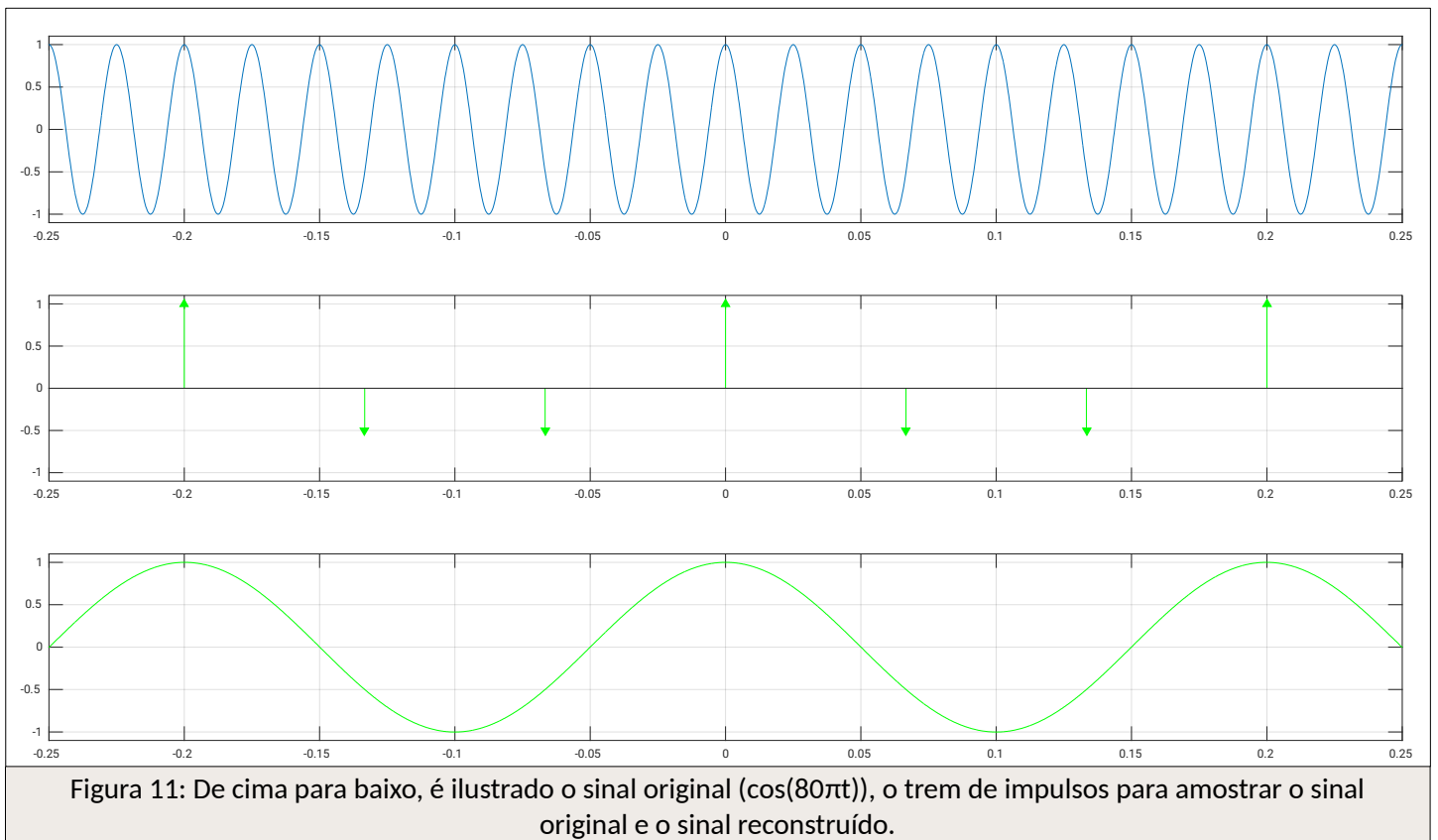


Figura 11: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(80\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal reconstruído.

Na Fig. 11 nota-se que a frequência do sinal reconstruído é bem menor do a do sinal original. A frequência do novo sinal é:

$$f = \frac{1}{0,2} = 5\text{Hz}$$

Sendo assim, a frequência do novo sinal é de 5 Hz, contra os 40 Hz do sinal original. Na próxima figura, o processo de amostragem será realizado respeitando a taxa de Nyquist para o sinal, que é de 80 Hz:

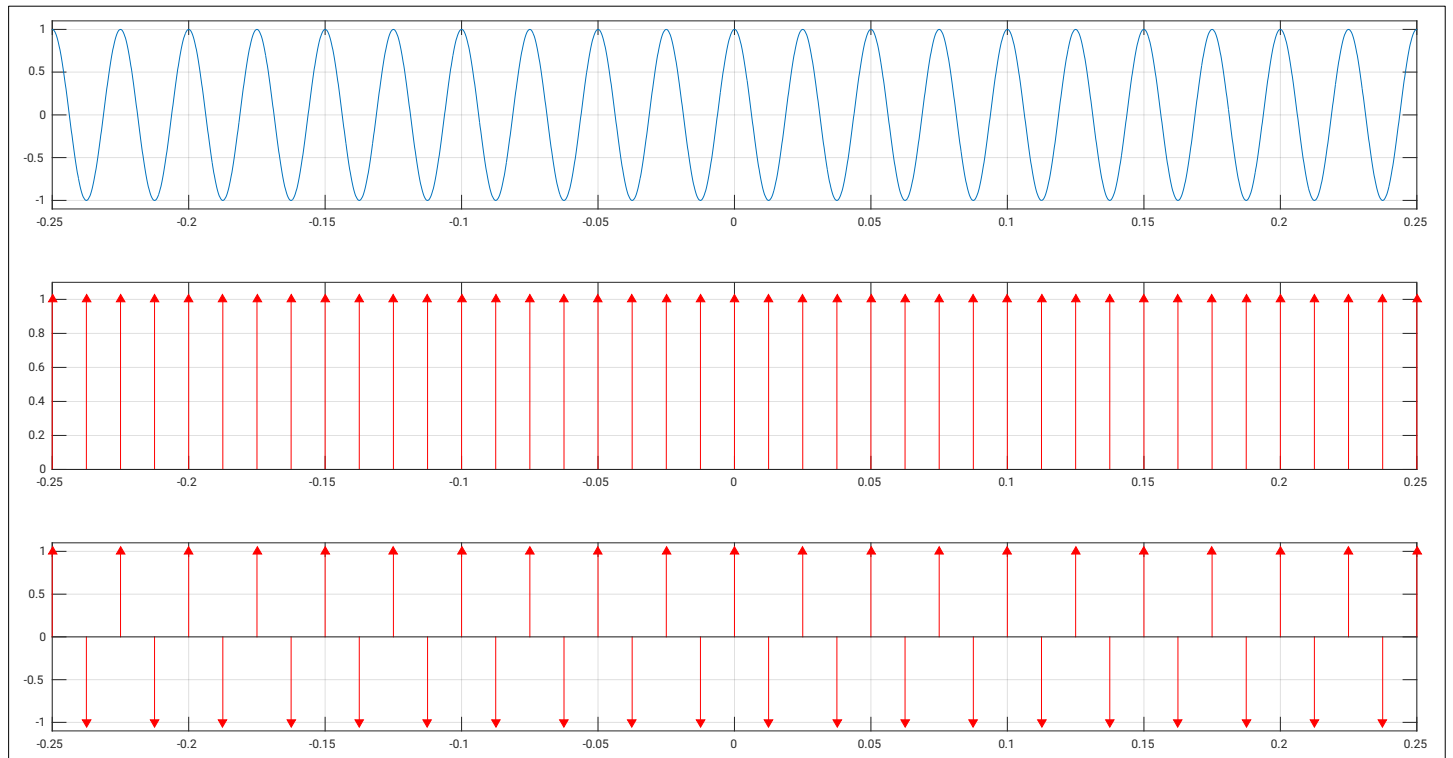


Figura 12: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(80\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal amostrado a 80Hz.

Obtido o trem de impulsos do sinal amostrado, na próxima figura, o sinal poderá ser reconstruído:

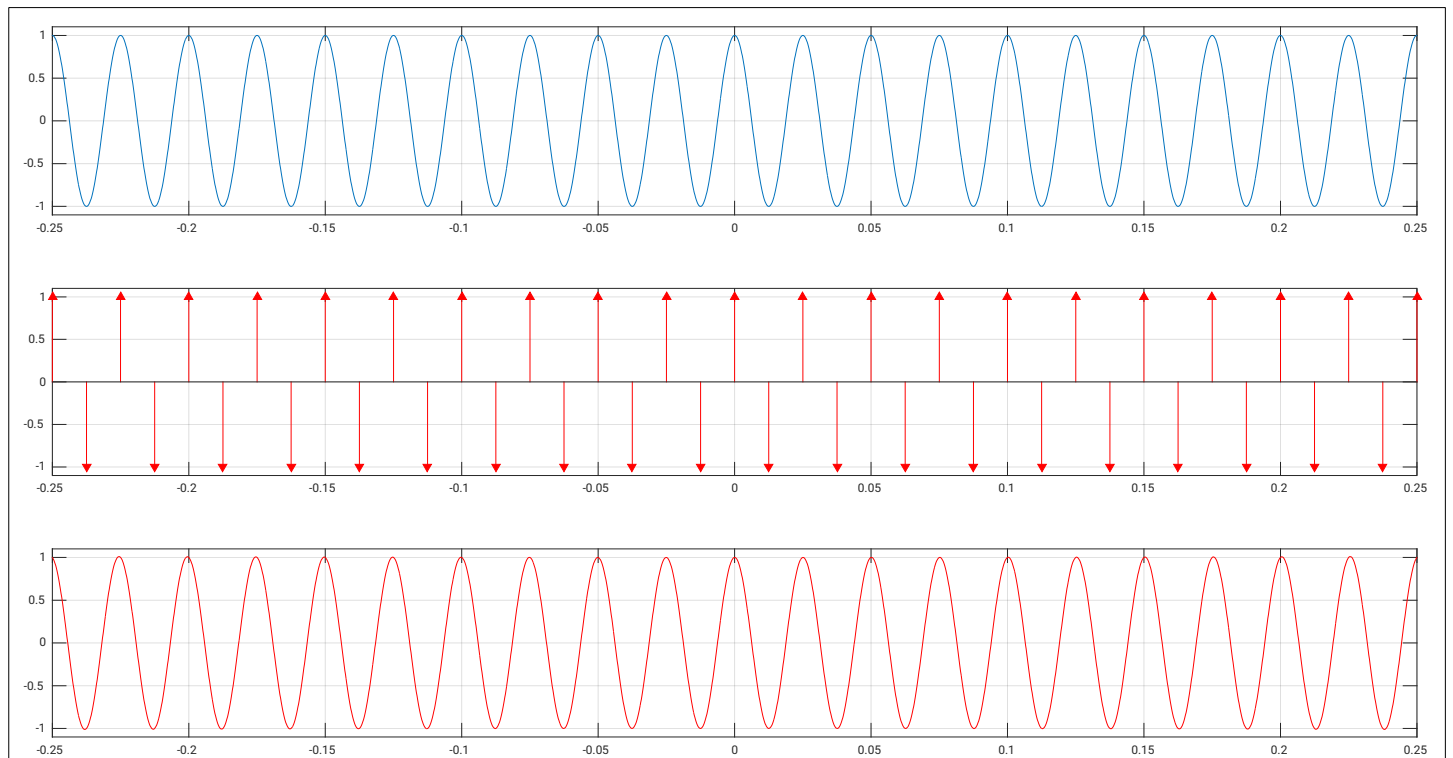


Figura 13: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(80\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal reconstruído.

Na Fig. 13 é mostrada a reconstrução perfeita do sinal original, ou seja, não houve perda de informação.

Análise teórica

Calculando a transformada de Fourier de $\cos(80\pi t)$ obtém-se:

$$\cos(80\pi t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - 80\pi) + \delta(\omega + 80\pi)]$$

Graficamente, obtém-se:

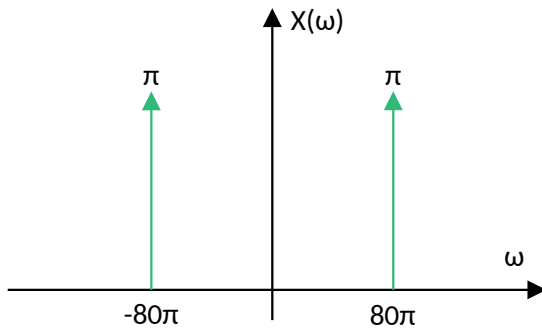


Figura 14: Transformada de Fourier de $\cos(80\pi t)$.

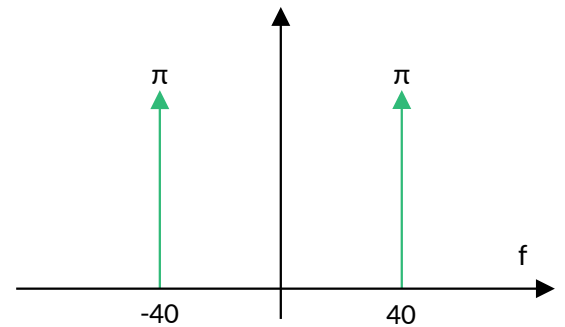


Figura 15: Transformada de Fourier de $\cos(80\pi t)$ dada em Hz.

Dada a taxa de amostragem de 15 Hz ser menor do que a taxa de Nyquist, a frequência aparente deve estar na faixa:

$$-\frac{15}{2} \leq f_a < \frac{15}{2} \quad \text{ou} \quad -7,5 \leq f_a < 7,5$$

Calculando-se a mesma, com $m = 1$, é obtido:

$$f_a = f - mf_s$$

$$f_a = 40 - 1 \cdot 15 = 40 - 15$$

$$f_a = 25 \text{ Hz}$$

Como f_a , com $m = 1$, não respeitou a faixa mostrada acima, sendo maior que 7,5, m será incrementado para 2:

$$f_a = 40 - 2 \cdot 15 = 40 - 30$$

$$f_a = 10$$

A frequência obtida ainda está fora da faixa, portanto, m é incrementado para 3:

$$f_a = 40 - 3 \cdot 15 = 40 - 45$$

$$f_a = -5 \text{ Hz}$$

O valor inteiro de m sendo 3 foi suficiente para o cálculo, cuja frequência aparente obtida está dentro da faixa calculada acima. Graficamente, é possível visualizar essa frequência aparente, observando a sobreposição dos impulsos:

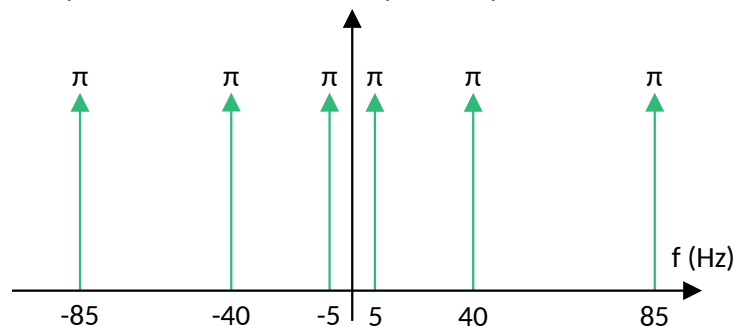


Figura 15: Amostragem do $\cos(80\pi t)$ na taxa de 15 Hz.

Utilizando um filtro passa baixas, um sinal de 5 Hz pode ser recuperado:

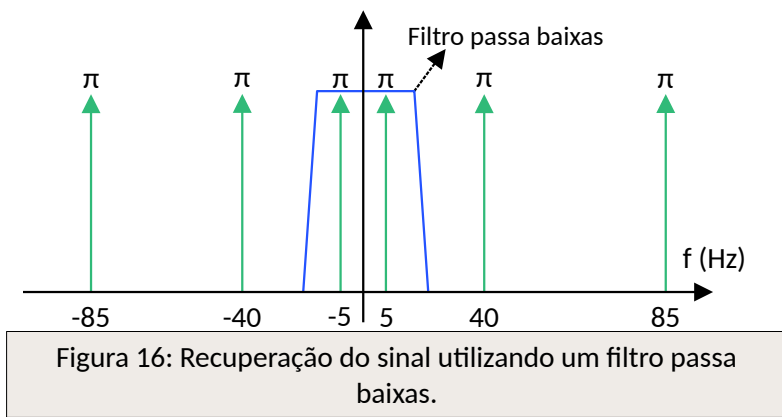


Figura 16: Recuperação do sinal utilizando um filtro passa baixas.

A Fig. 16 mostra que, pela frequência aparente do sinal recuperado ser diferente do sinal original, a informação foi perdida. Já na figura a seguir, será mostrado como seria essa recuperação caso a taxa de Nyquist fosse respeitada:

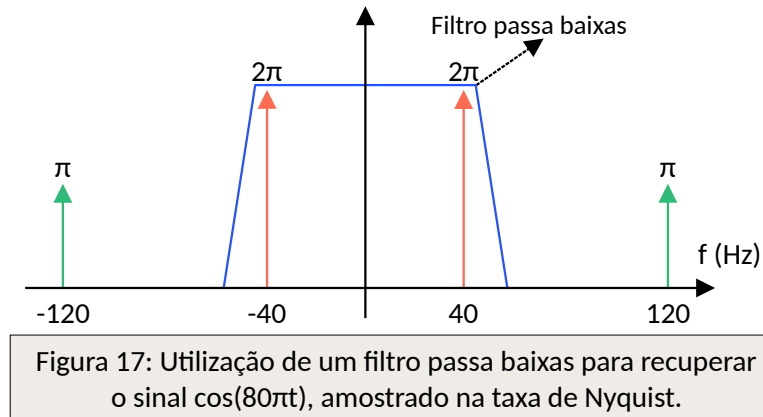


Figura 17: Utilização de um filtro passa baixas para recuperar o sinal $\cos(80\pi t)$, amostrado na taxa de Nyquist.

Na Fig. 17, é mostrado que o sinal original pôde ser reconstruído sem utilizar um filtro ideal. Também é possível observar que o sinal recuperado possui o dobro da amplitude do sinal original. Isso ocorre pela sobreposição exata dos impulsos dos sinais gerados, com os impulsos do sinal original. Essa é uma característica desses sinais cuja transformada gera impulsos.

- Questão 3) Cosseno: 10 Hz, Amostragem: 50 Hz.

Código-fonte utilizado:

```

1 % Sinal analógico inicial
2 % (frequência de 10 Hz)
3 [m,t] = makecos(10);
4
5 % Trem de impulso para amostrar o sinal
6 % (frequência de amostragem de 20 Hz)
7 [it1,ts1] = makeimp(20);
8
9 % Amostrando o sinal original
10 ms1 = sampleit1(t,m,ts1);
11
12 % Plotando todos os sinais para visualizar o processo de amostragem
13 c1 = 'r'; % cor para o primeiro cenário
14 smp1_plot(t,m,ts1,it1,ms1,c1);
15
16 % Segundo trem de impulsos
17 % (frequência de amostragem de 50 Hz, maior que a taxa de Nyquist)
18 [it2,ts2] = makeimp(50);
19
20 % Amostrando o sinal original com a nova taxa de amostragem
21 ms2 = sampleit1(t,m,ts2);
22
23 % Plotando todos os sinais para visualizar o processo de amostragem
24 c2 = 'g'; % cor para o Segundo cenário
25 smp1_plot(t,m,ts2,it2,ms2,c2);

```

```

26
27 % Reconstrução das duas versões amostradas
28 mr1 = interpsinc(ms1,ts1,t);
29 mr2 = interpsinc(ms2,ts2,t);
30
31 % Plotando o sinal original e o sinal reconstruído para comparar
32 recon_plot(t,m,ts1,ms1,mr1,c1);
33 recon_plot(t,m,ts2,ms2,mr2,c2);
34
35 % Obtendo o espectro para examinar o aliasing
36 % Faça o índice de frequência para plotagem
37 f = (-5000/2):(1/2):(5000/2);
38
39 % Função para calcular o espectro
40 M = am_spectrum(m);
41 MR1 = am_spectrum(mr1);
42 MR2 = am_spectrum(mr2);
43
44 % Plotando o espectro para comparar
45 am_plot(f,M,MR1,MR2,0.02);

```

A partir do código acima, no Matlab, gerou-se os gráficos abaixo:

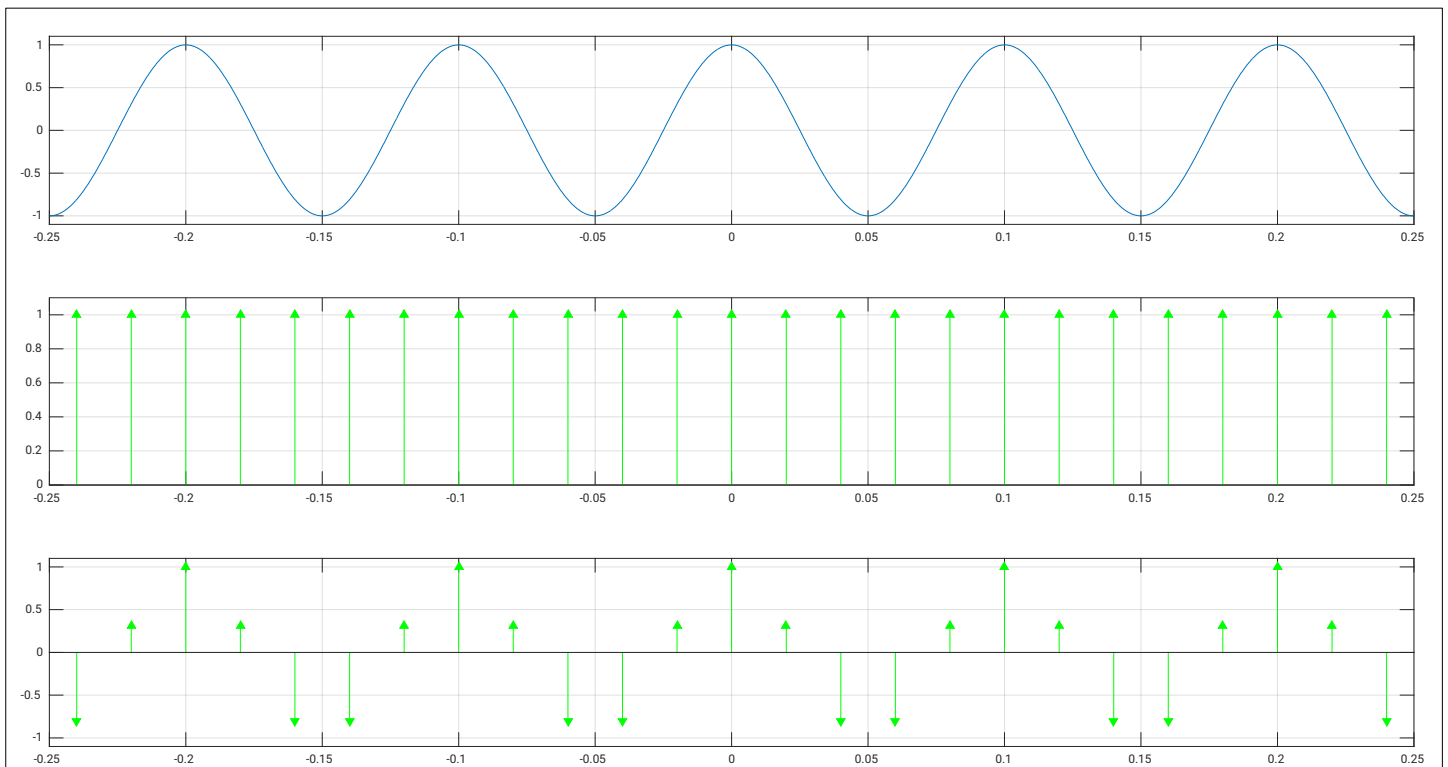
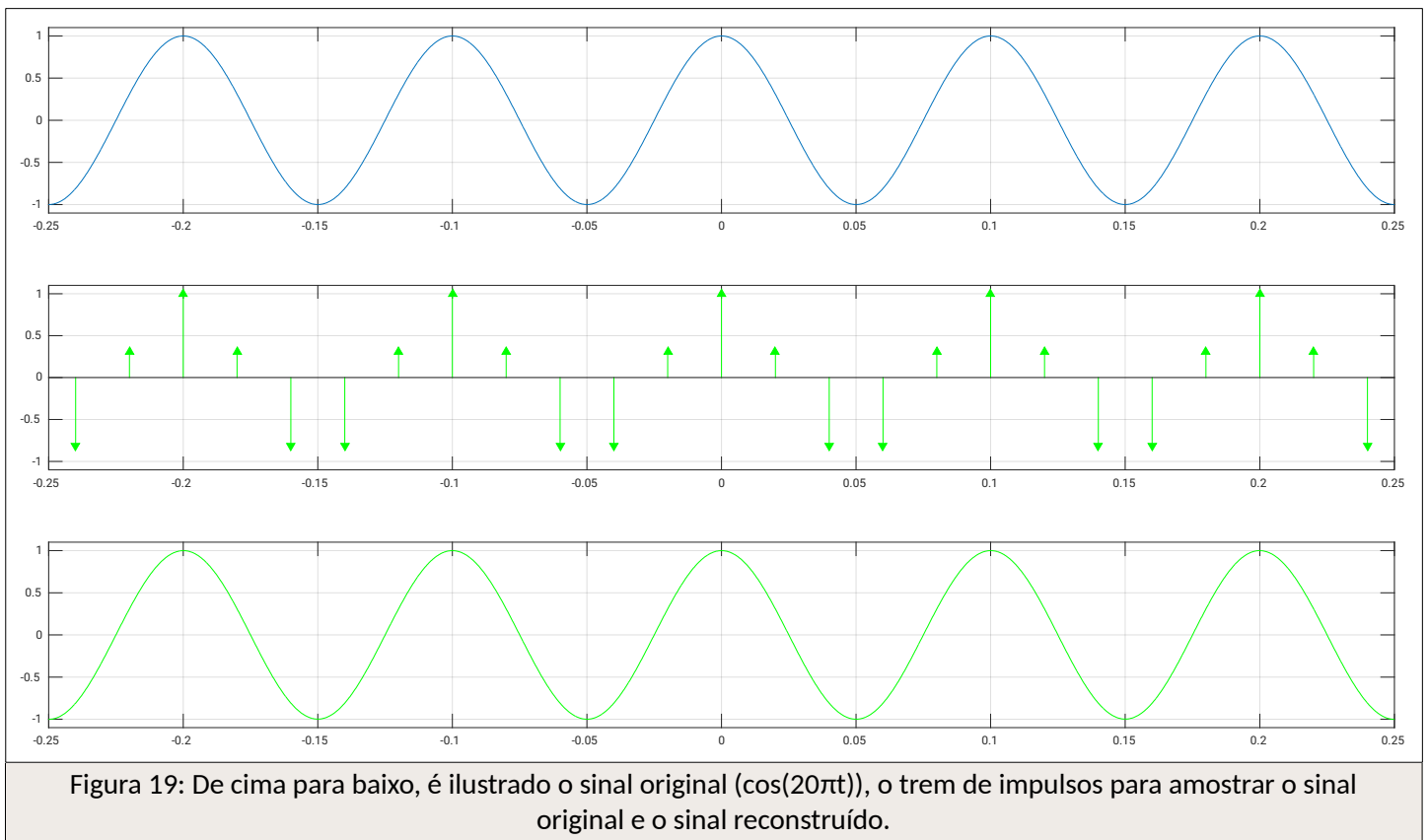


Figura 18: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(20\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal amostrado a 50 Hz.

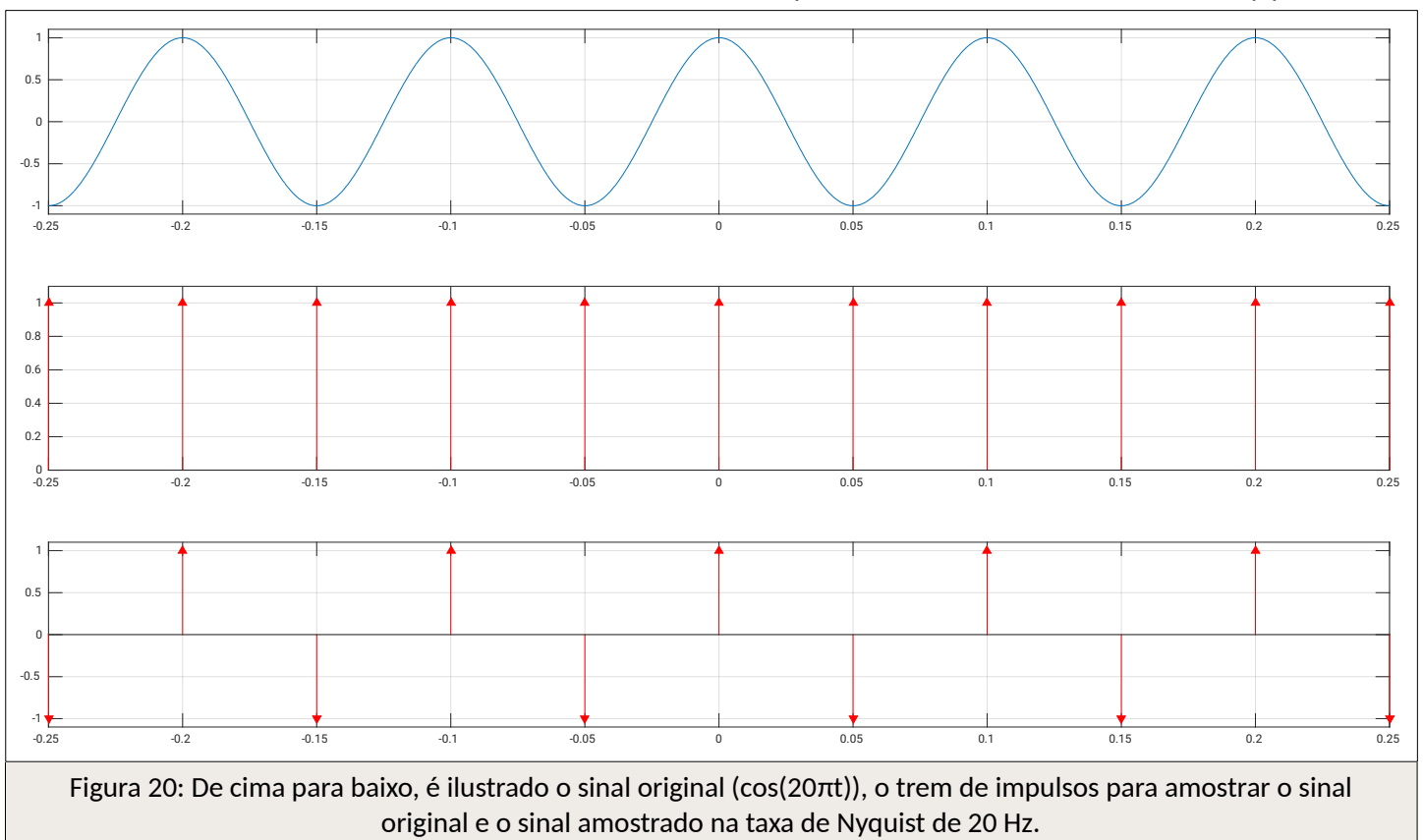
Na Fig. 18 estão representados os trens de impulsos resultantes da amostragem em 50 Hz. Nota-se que não ocorrerá o *aliasing*, já que a taxa usada para amostragem é maior que o dobro da taxa de Nyquist. Nesse caso, foi realizada uma superamostragem. Na próxima figura será mostrado que o sinal pôde ser reconstruído de forma íntegra.



Na Fig. 19 é mostrado que o sinal amostrado foi integralmente reconstruído. Portanto, a frequência obtida é

$$f = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ Hz}$$

Como curiosidade, será mostrado como ficaria o trem se impulsos do sinal amostrado na taxa de Nyquist:



Análise teórica

Calculando a transformada de Fourier de $\cos(20\pi t)$ obtém-se:

$$\cos(20\pi t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - 20\pi) + \delta(\omega + 20\pi)]$$

Graficamente, obtém-se:

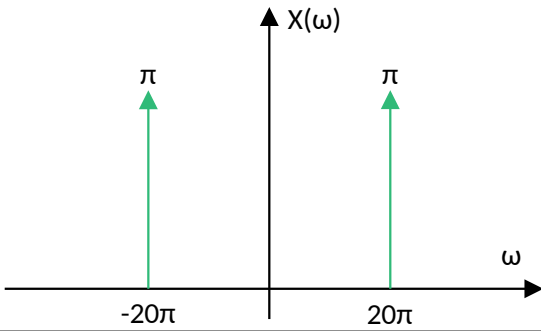


Figura 21: Transformada de Fourier de $\cos(20\pi t)$.

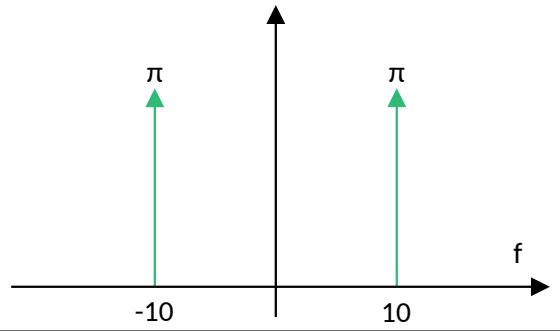


Figura 22: Transformada de Fourier de $\cos(20\pi t)$ dada em Hz.

Como a taxa de amostragem é até maior que o dobro da taxa de Nyquist, não ocorrerá *aliasing*. Portanto, a frequência aparente do sinal recuperado será a mesma do sinal original e sem perda de informação. Graficamente, é possível visualizar como os impulsos do sinal original são preservados:

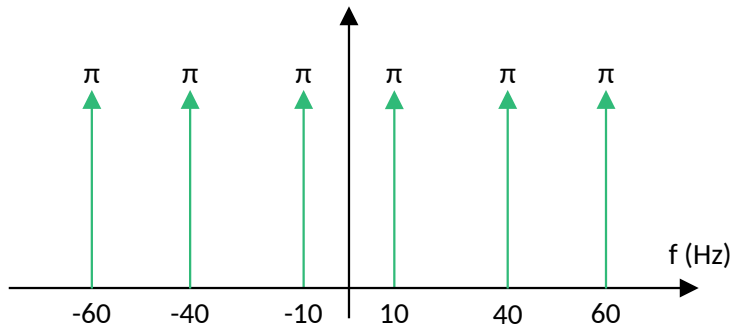


Figura 23: Amostragem do $\cos(20\pi t)$ na taxa de 50 Hz.

Utilizando um filtro passa baixas, o sinal de 10 Hz pode ser recuperado sem alterações em sua característica original:

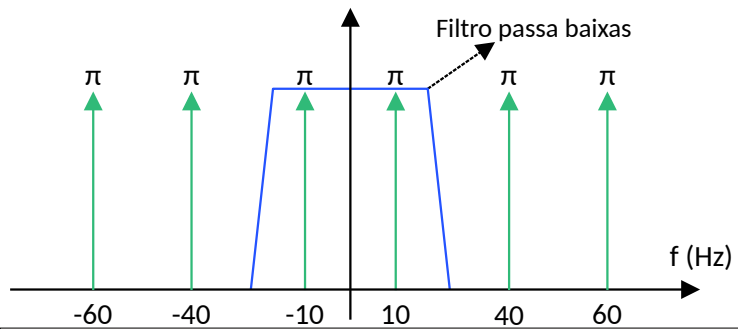


Figura 24: Recuperação do sinal $\cos(20\pi t)$ utilizando um filtro passa baixas.

Como curiosidade, a figura a seguir mostra como ficaria a amostragem e como seria a recuperação do sinal caso o mesmo fosse amostrado utilizando a taxa de Nyquist, ou seja, sem sofrer a superamostragem:

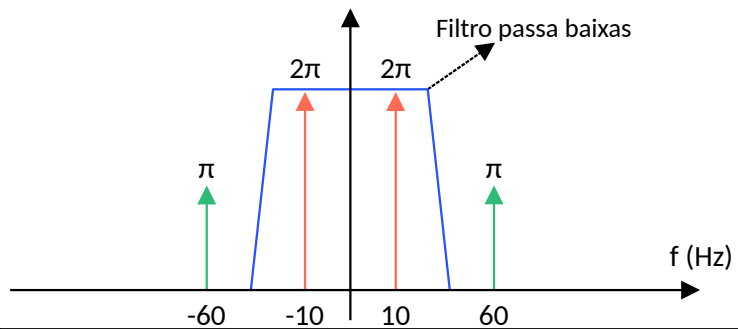


Figura 25: Recuperação do sinal $\cos(20\pi t)$ utilizando um filtro passa baixas.

Assim como mostrado na Fig. 24, na Fig. 25 o sinal é recuperado, o que é esperado já que a amostragem respeitou a taxa de Nyquist. A diferença é que quando houve superamostragem, a amplitude original foi mantida, e no último caso, pela ocorrência da sobreposição de impulsos, a amplitude final foi o dobro da original. Em ambos os casos o filtro não precisou ser ideal. Entretanto, no caso da Fig. 24, seria possível utilizar um filtro de ordem menor do que no caso da Fig. 25.

- Questão 4) Cosseno: 20 Hz, Amostragem: 40 Hz.

Código-fonte utilizado:

```
1 % Sinal analógico inicial
2 % (frequência de 20 Hz)
3 [m,t] = makecos(20);
4
5 % Trem de impulso para amostrar o sinal
6 % (frequência de amostragem de 40 Hz)
7 [it1,ts1] = makeimp(40);
8
9 % Amostrando o sinal original
10 ms1 = sampleit1(t,m,ts1);
11
12 % Plotando todos os sinais para visualizar o processo de amostragem
13 c1 = 'r'; % cor para o primeiro cenário
14 smp1_plot(t,m,ts1,it1,ms1,c1);
15
16 % Segundo trem de impulsos
17 % (frequência de amostragem de 40 Hz, exatamente a taxa de Nyquist)
18 [it2,ts2] = makeimp(40);
19
20 % Amostrando o sinal original com a nova taxa de amostragem
21 ms2 = sampleit1(t,m,ts2);
22
23 % Plotando todos os sinais para visualizar o processo de amostragem
24 c2 = 'g'; % cor para o Segundo cenário
25 smp1_plot(t,m,ts2,it2,ms2,c2);
26
27 % Reconstrução das duas versões amostradas
28 mr1 = intersinc(ms1,ts1,t);
29 mr2 = intersinc(ms2,ts2,t);
30
31 % Plotando o sinal original e o sinal reconstruído para comparar
32 recon_plot(t,m,ts1,ms1,mr1,c1);
33 recon_plot(t,m,ts2,ms2,mr2,c2);
34
35 % Obtendo o espectro para examinar o aliasing
36 % Faça o índice de frequência para plotagem
37 f = (-5000/2):(1/2):(5000/2);
38
39 % Função para calcular o espectro
40 M = am_spectrum(m);
41 MR1 = am_spectrum(mr1);
42 MR2 = am_spectrum(mr2);
43
44 % Plotando o espectro para comparar
45 am_plot(f,M,MR1,MR2,0.02);
```

Abaixo, estão os gráficos gerados pela ferramenta Matlab:

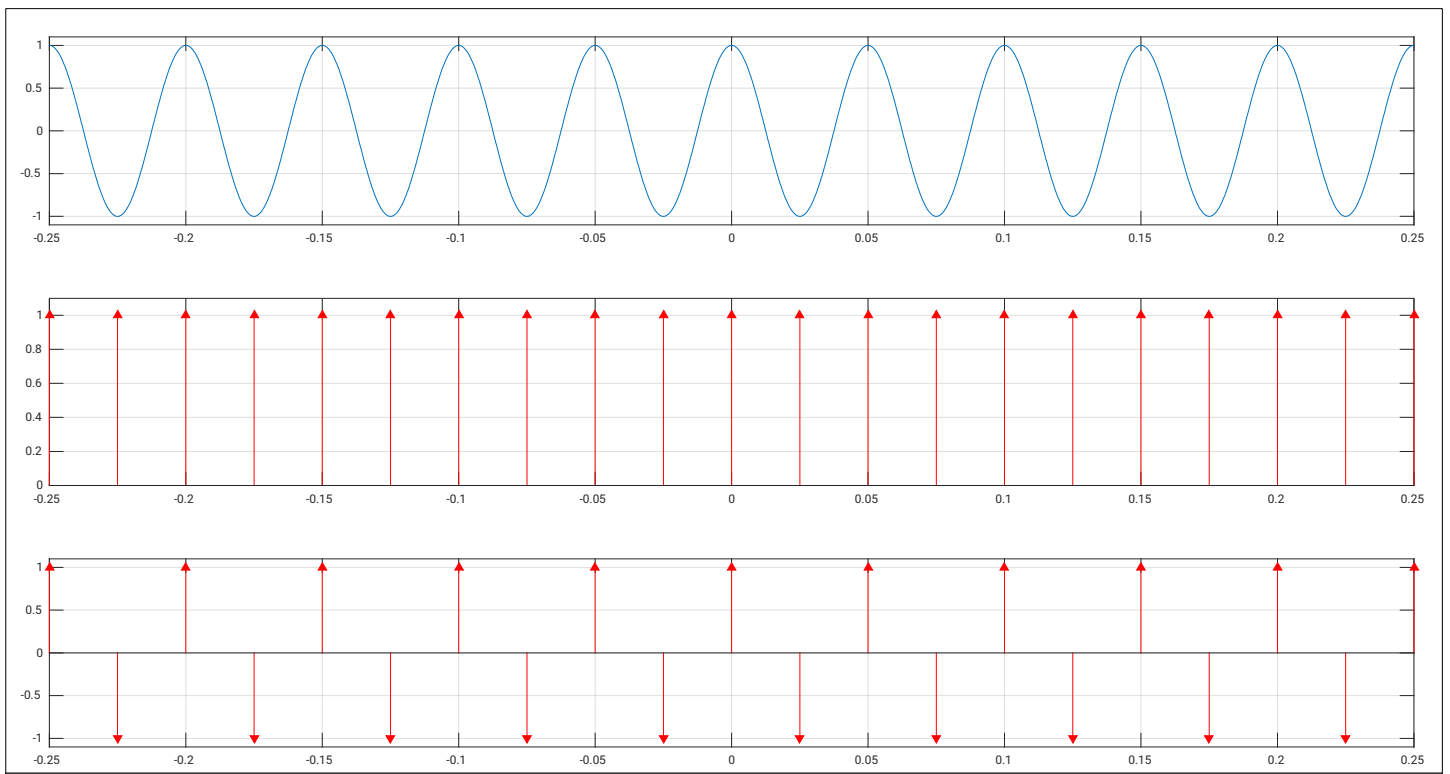


Figura 26: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(40\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal amostrado a 40 Hz.

O conjunto de gráficos da Fig. 26 ilustram a amostragem realizada na taxa de Nyquist, ou seja, em 40 hertz. Abaixo, será ilustrado que o sinal pôde ser reconstruído:

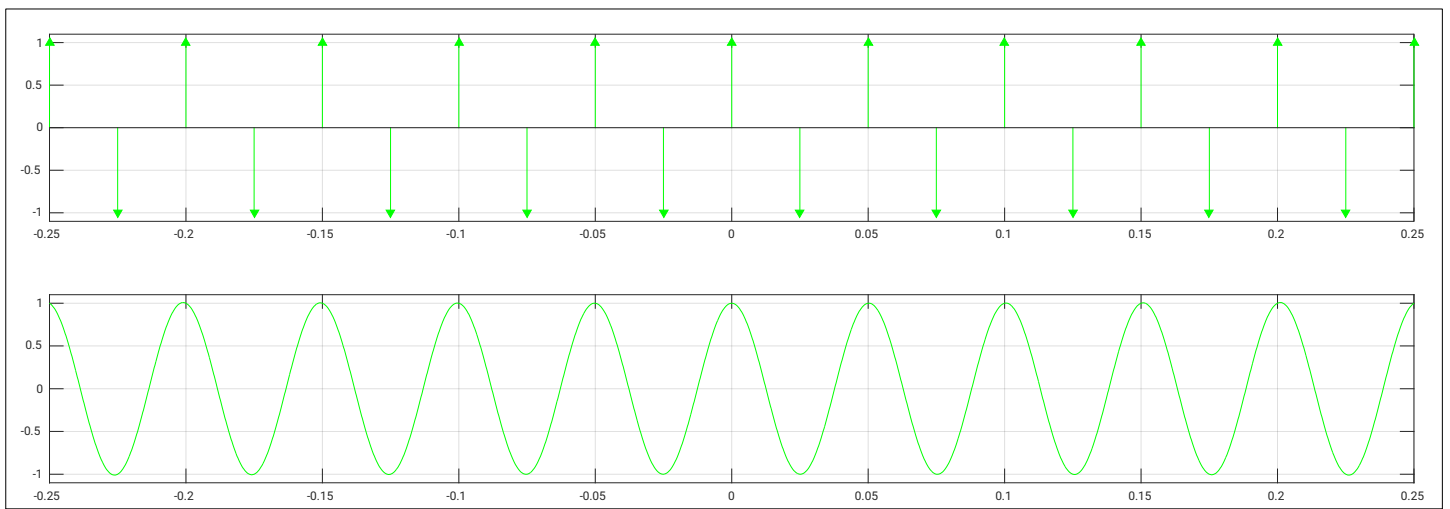


Figura 27: De cima para baixo, é ilustrado o sinal original ($\cos(40\pi t)$), o trem de impulsos para amostrar o sinal original e o sinal reconstruído.

Na Fig. 27, é visto que o sinal reconstruído, ao longo do tempo, começa a ter alguns deslocamentos de frequência. Na Fig. 28, ao lado, é mostrada uma ampliação do sinal reconstruído em questão.

Essa leve variação da frequência ao longo do tempo ocorre em decorrência da precisão do filtro utilizado.

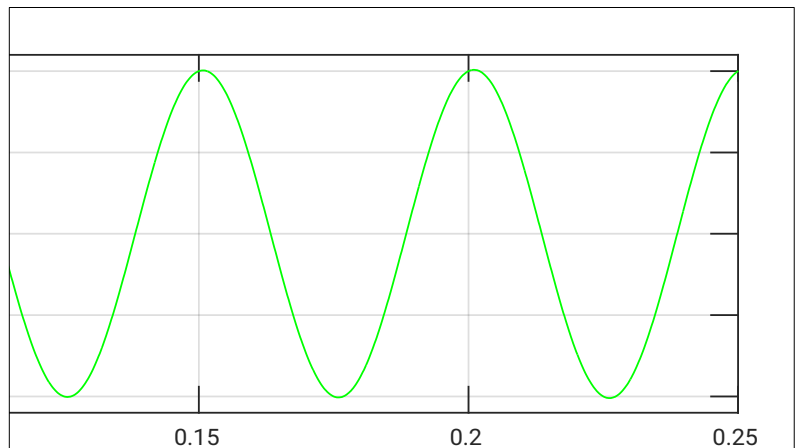


Figura 28: Ampliação do gráfico do sinal reconstruído da Figura 27.

Idealmente a frequência do sinal recuperado é a mesma do sinal original. Nesse caso, não ocorre o *aliasing*. A frequência do sinal recuperado é dada por:

$$f = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ Hz}$$

Análise teórica

Calculando a transformada de Fourier de $\cos(40\pi t)$ obtém-se:

$$\cos(40\pi t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - 40\pi) + \delta(\omega + 40\pi)]$$

Graficamente, obtém-se:

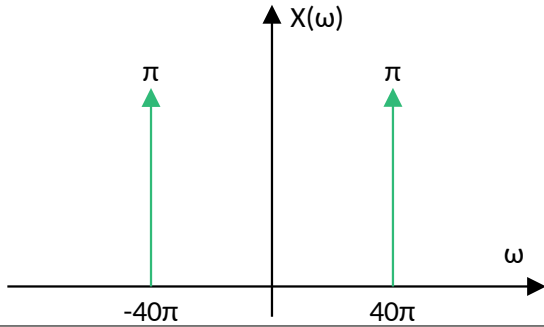


Figura 29: Transformada de Fourier do $\cos(40\pi t)$.

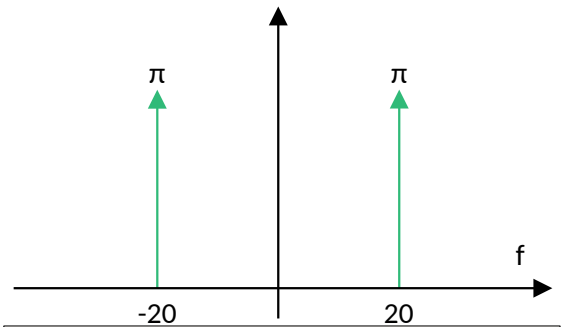


Figura 30: Transformada de Fourier do $\cos(40\pi t)$ dada em Hz.

Como a taxa de amostragem de 40 Hz respeita a taxa de Nyquist, não ocorrerá *aliasing*. Abaixo, é possível visualizar a frequência aparente, observando a sobreposição dos impulsos:

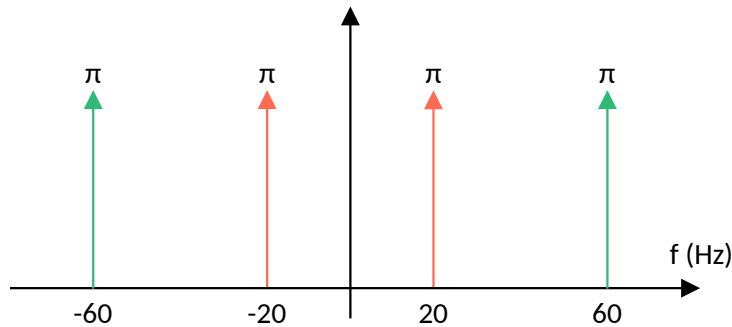


Figura 31: Amostragem do $\cos(40\pi t)$ na taxa de 40 Hz.

Utilizando um filtro passa baixas, o sinal de 40 Hz pode ser recuperado:

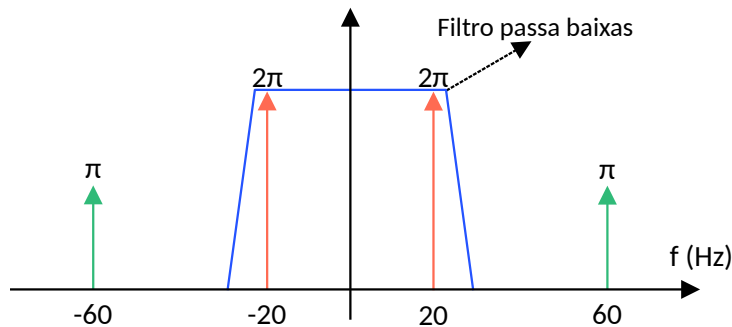


Figura 32: Recuperação do sinal $\cos(40\pi t)$ utilizando um filtro passa baixas.

Assim como visto nos casos anteriores, apesar do sinal recuperado sem perdas, a amplitude final dobrou. Dada a característica desse tipo de sinal, mesmo utilizado a taxa de Nyquist, não é necessário utilizar um filtro ideal.