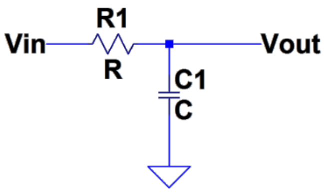
INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA
Campus São José

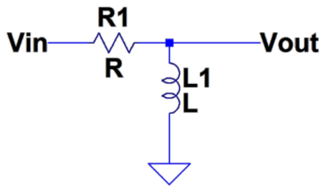
Curso Técnico Integrado em Telecomunicações
PRT60806 – Princípios de Telecomunicações
Professor: Bruno Fontana da Silva
2014-2

Lista de Exercícios 04 – Filtragem Analógica

(1) Para os circuitos abaixo, determine a função de transferência (sem substituir os valores de R, L, C e ω).



(a)



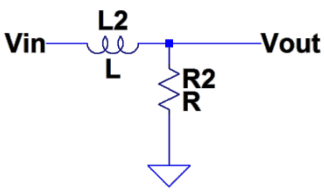
(c)

(a)

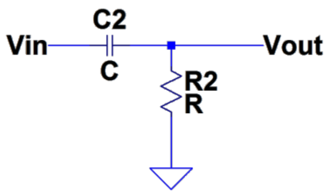
$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_{C1}}{R_1 + Z_{C1}} = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

(c)

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_{L1}}{R_1 + Z_{L1}} = \frac{j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1}$$



(b)



(d)

(b)

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_2 + Z_{L2}} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2}$$

(d)

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_2 + Z_{C2}} = \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

Com as funções de transferência anteriores, responda os itens abaixo:

i) Determine as frequências de corte de cada circuito para os seguintes valores de componentes:

$L_1 = 280\ \mu H \quad L_2 = 500\ \mu H;$

$R_1 = 35\ \Omega \quad R_2 = 1\ k\Omega;$

$C_1 = 420\ nF \quad C_2 = 10\ pF.$

(a)

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_1 C_1} \to f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

$$f_c = 10{,}82\ kHz$$

(b)

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{L_2/R_2} = \frac{R_2}{L_2} \to f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{R_2}{2\pi L_2}$$

$$f_c = 318{,}30\ kHz$$

(c)

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\frac{L_1}{R_1}} = \frac{R_1}{L_1} \to f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{R_1}{2\pi L_1}$$

$$f_c = 19{,}89\ kHz$$

(d)

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_2 C_2} \to f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$$

$$f_c = 15{,}91\ MHz$$

ii) Com os valores de componentes acima, para cada circuito calcule e preencha os valores da tabela abaixo (ganho e fase), assumindo $V_{in} = 1\angle 0°$.

(a)

f (Hz)	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
Ganho ou Vout [V]	0,9999995	0,9999573	0,9957616	0,734601	0,1076396	0,0108262	0,0010826
Ganho [dB] ou Vout [dBV]	-3,70E-06	-0,0003704	-0,0368920	-2,6789630	-19,360556	-39,310453	-59,309949
Ângulo [°]	-0,05	-0,53	-5,28	-42,73	-83,82	-89,38	-89,94

(b)

frequência [Hz]	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
Ganho ou Vout [V]	1	0,9999999	0,9999950	0,9995068	0,9540282	0,3033144	0,0318148
Ganho (dB) ou Vout [dBV]	-4,29E-09	-4,29E-07	-4,29E-05	-0,0042842	-0,4087756	-10,362137	-29,947395
Ângulo [°]	0	-0,02	-0,18	-1,8	-17,44	-72,34	-88,18

(c)

frequência [Hz]	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
Ganho ou Vout [V]	0,00050	0,00502	0,0502	0,44911	0,980779	0,99980	0,999998
Ganho (dB) ou Vout [dBV]	-65,97460	-45,9747	-25,9855	-6,952941	-0,168573	-0,001718	-1,72E-05
Ângulo [°]	89,97	89,71	87,12	63,31	11,25	1,14	0,11

(d)

frequência [Hz]	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
Ganho ou Vout [V]	6,30E-06	6,28E-05	6,28E-04	6,28E-03	6,28E-02	6,27E-01	5,3201804
Ganho (dB) ou Vout [dBV]	-124,036	-104,036	-84,0364	-64,0364	-44,0365	-24,0535	-5,48147
Ângulo [°]	90	90	90	89,96	89,64	86,4	57,86

iii) Classifique o filtro quanto ao tipo de resposta em frequência (analisando apenas a amplitude).

a) LPF (passa-baixas) **b)** LPF **c)** HPF (passa-altas) **d)** HPF

(2) Dadas as seguintes funções de transferência,

$$\mathbf{H}_1(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{j\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_{c1}} + 1}$$

$$\mathbf{H}_2(\omega) = \frac{j\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_{c2}}}{j\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_{c2}} + 1}$$

$$\mathbf{H}_3(\omega) = \frac{j\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_{c2}}}{1 - \left(\frac{1}{\omega_{c1}\omega_{c2}}\right)\boldsymbol{\omega}^2 + j\left(\frac{\omega_{c1}+\omega_{c2}}{\omega_{c1}\omega_{c2}}\right)\boldsymbol{\omega}}$$

$$\mathbf{H}_4(\omega) = \frac{1 + j\left(2\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_{c4}} + \frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\omega_{c3}\omega_{c4}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\omega_{c3}\omega_{c4}}\right)\boldsymbol{\omega}^2 + j\left(\frac{\omega_{c3}+\omega_{c4}}{\omega_{c3}\omega_{c4}}\right)\boldsymbol{\omega}}$$

a. Considere $\omega_{c1} = 60\pi \times 10^5$, $\omega_{c2} = 20\pi \times 10^3$, $\omega_{c3} = 2\pi \times 10^4$, $\omega_{c4} = 2\pi \times 10^6$. Determine o ganho/fase dos quatro filtros nas 5 frequências a seguir: $\omega = (10^2, 10^4, 10^{5.825}, 10^7, 10^9)$ rad/s.

$H_1(\omega) = H_1(2\pi f)$					
frequência [krad/s]	**0.1**	**10**	**668,3439**	**10000**	**1000000**
Ganho (dB)	0	-0,1086	-20,5746	-44,0366	-84,0364
Ângulo [°]	-0,09	-9,04	-84,63	-89,64	-90

$H_2(\omega) = H_2(2\pi f)$					
frequência [krad/s]	**0.1**	**10**	**668,3439**	**10000**	**1000000**
Ganho (dB)	-95,9636	-55,9636	-19,5125	-1,4451	-0,0002
Ângulo [°]	90	89,91	83,93	32,14	0,36

$H_3(\omega) = H_3(2\pi f)$					
frequência [krad/s]	**0.1**	**10**	**668,3439**	**10000**	**1000000**
Ganho (dB)	-55,9636	-16,0722	-0,0437	-1,0772	-34,4955
Ângulo [°]	89,91	80,93	3,34	-27,59	-88,92

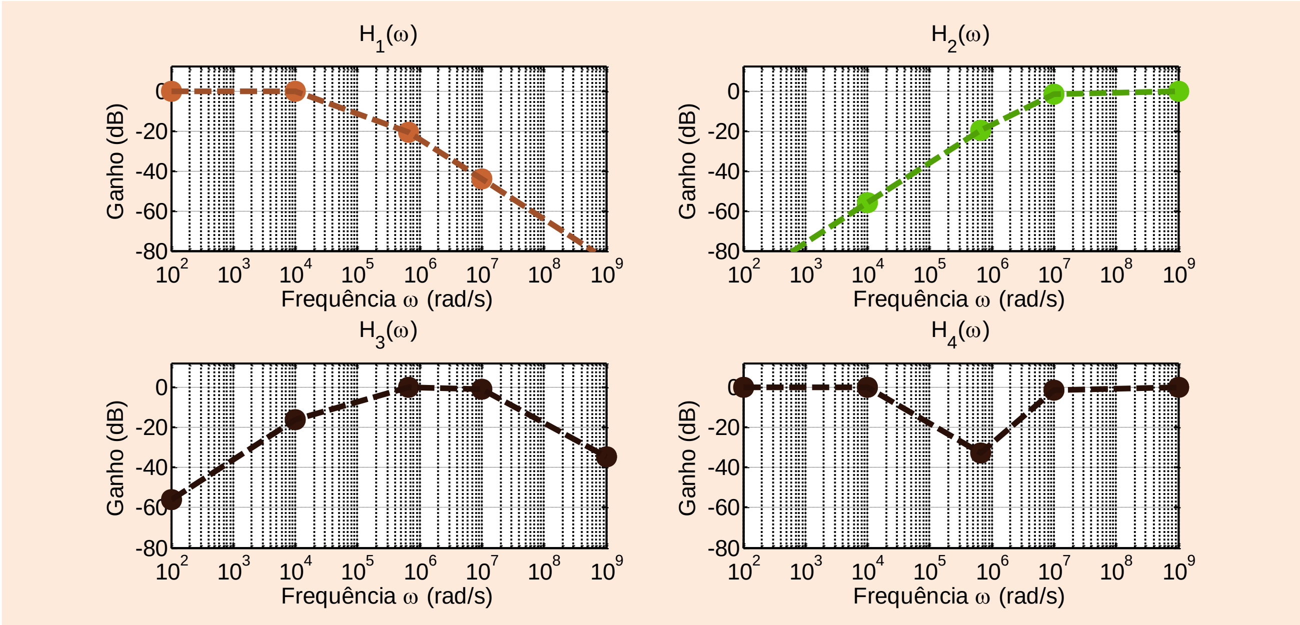
$H_4(\omega) = H_4(2\pi f)$					
frequência [krad/s]	**0.1**	**10**	**668,3439**	**10000**	**1000000**
Ganho (dB)	0	-0,1108	-32,6618	-1,4789	-0,0002
Ângulo [°]	-0,09	-8,95	31,01	31,78	0,36

b. Classifique cada um dos filtros quanto ao tipo de ganho em amplitude (HP, LP, BP, BS).

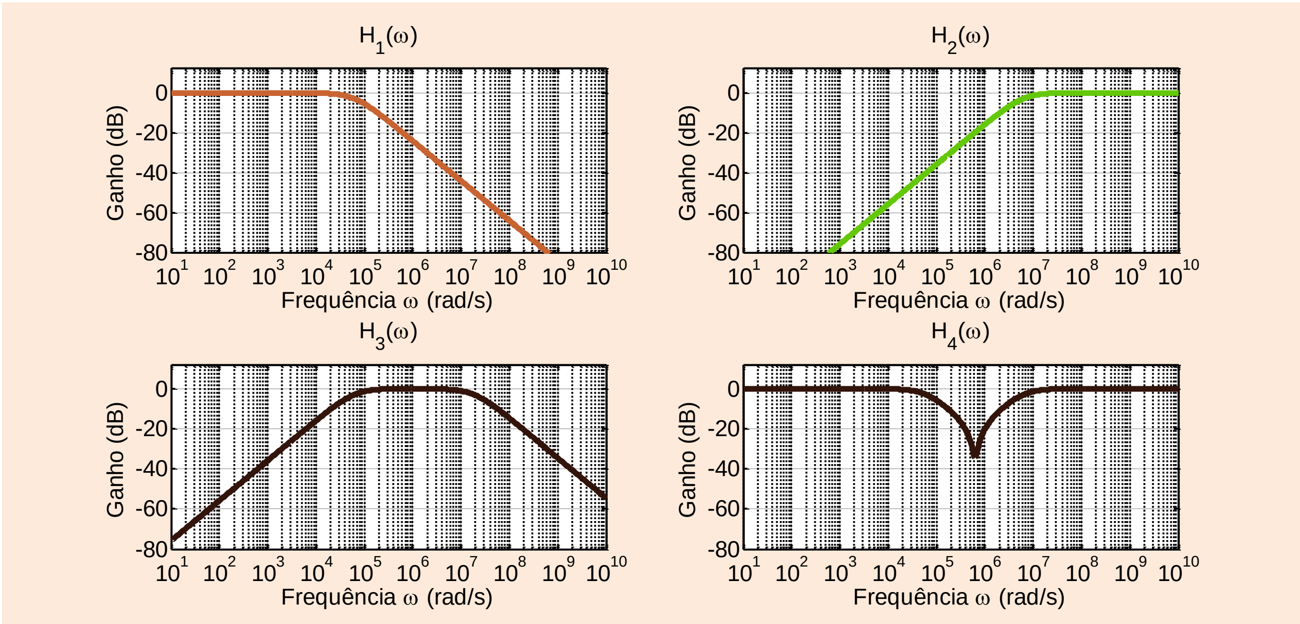
$H_1(\omega) \rightarrow$ LPF (passa – baixas)
$H_2(\omega) \rightarrow$ HPF (passa – altas)
$H_3(\omega) \rightarrow$ BPF (passa – banda)
$H_4(\omega) \rightarrow$ BSF (rejeita – banda)

c. Faça um esboço do diagrama de bode das quatro funções de transferência (apenas amplitude, em dB) com os valores calculados no item **(a)**.

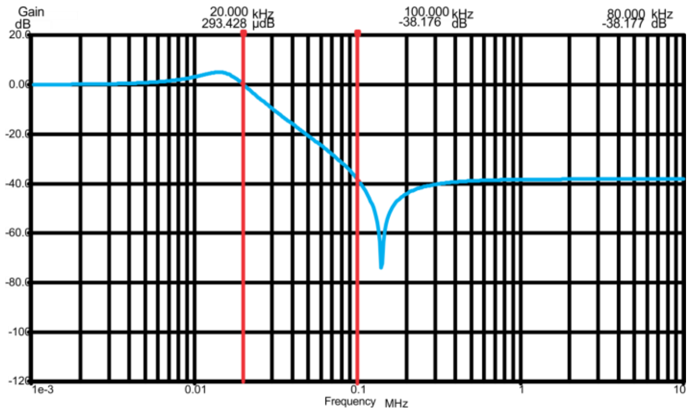
Usando somente os pontos da tabela anterior, fica algo como:



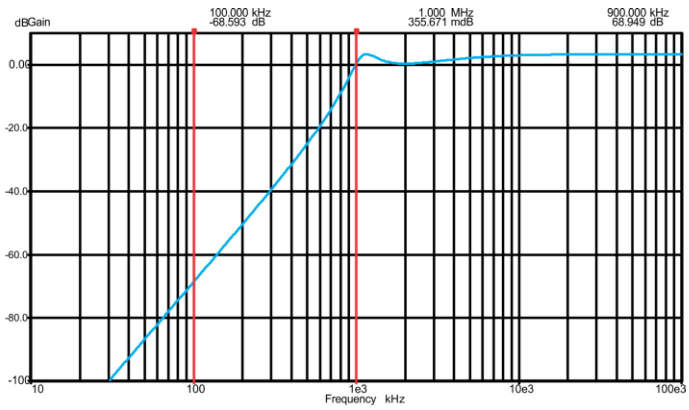
Usando mais pontos ou ligando os pontos de forma coerente (contornos arredondados), os gráficos seriam idealmente como os abaixo:



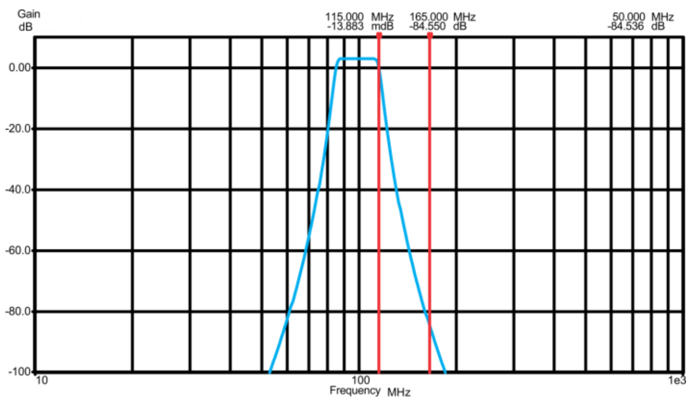
(3) Analise os diagramas de Bode abaixo e, para cada função de transferência (A, B e C), determine:



Filtro A



Filtro B



Filtro C

a. O tipo de filtro em relação ao método de síntese (Butterworth, Chebyshev, Cauer ou Bessel). Justifique.

Filtro A: Cauer (ou elíptico) – oscilações nas bandas passante e de rejeição;

Filtro B: Chebyshev (tipo 1) – oscilações apenas na banda passante

Filtro C: Butterworth – banda passante plana e rejeição com decaimento contínuo

b. Intervalos de frequência da banda passante, da banda de transição e da banda de rejeição.

Filtro A:

Banda passante: $\mathrm{f} < 20\ \mathrm{kHz}$

Banda de transição: $20\ \mathrm{kHz} \leq \mathrm{f} \leq 100\ \mathrm{kHz}$

Banda de rejeição: $\mathrm{f} > 100\ \mathrm{kHz}$

Filtro B:

Banda passante: $\mathrm{f} > 1\ \mathrm{MHz}$

Banda de transição: $100\ \mathrm{kHz} \leq \mathrm{f} \leq 1\ \mathrm{MHz}$

Banda de rejeição: $\mathrm{f} < 100\ \mathrm{kHz}$

Filtro C:

Banda passante: $100\ \mathrm{kHz} \leq \mathrm{f} \leq 1\ \mathrm{MHz}$

Banda de transição: $\mathrm{f} \in [59\ \mathrm{MHz} - 85\ \mathrm{MHz}] \cup [115\ \mathrm{MHz} - 165\ \mathrm{MHz}]$

Banda de rejeição: $\mathrm{f} \in [0\ \mathrm{Hz} - 59\ \mathrm{MHz}) \cup (165\ \mathrm{MHz}, +\infty\ \mathrm{Hz})$

c. Ripple da banda passante.

*****É analisado apenas na banda passante.**

Filtro A: $\Delta \text{ganho}^{\text{pass}} = A_{\text{max}}^{\text{pass}} - A_{\text{min}}^{\text{pass}} = 5 - 0 = \mathbf{5\ dB}$

Filtro B: $\Delta \text{ganho}^{\text{pass}} = A_{\text{max}}^{\text{pass}} - A_{\text{min}}^{\text{pass}} = 3 - 0 = \mathbf{3\ dB}$

Filtro C: $\Delta \text{ganho}^{\text{pass}} = A_{\text{max}}^{\text{pass}} - A_{\text{min}}^{\text{pass}} = 0 - 0 = \mathbf{0\ dB}$

d. Maior ganho da banda de atenuação.

Analisando apenas o intervalo da banda de rejeição, analisa-se o maior ganho.

Filtro A: $A_{\text{max}}^{\text{rej}} = \mathbf{-39\ dB}$

Filtro B: $A_{\text{max}}^{\text{rej}} = \mathbf{-70\ dB}$

Filtro C: $A_{\text{max}}^{\text{rej}} = \mathbf{-85\ dB}$

e. Taxa de atenuação/ganho na banda de transição.

Analisando apenas o intervalo da banda de transição; para análise por década, pode-se considerar que o decaimento é sempre linear e estender o gráfico quando a leitura ficar difícil; alternativamente, pode-se fazer a análise por oitava.

Filtro A: $\frac{\Delta \text{ganho}}{\text{oitava}} = \mathbf{-18\ dB/oitava}$ **(analisado entre 20 kHz e 40 kHz)**

Filtro B: $\frac{\Delta \text{ganho}}{\text{década}} = \mathbf{-70\ dB/década}$ **(analisado entre 100 kHz e 1000 kHz)**

Filtro C: $\frac{\Delta \text{ganho}}{\text{oitava}} = \mathbf{-110\ dB/oitava}$ **(analisado entre 115 MHz e 230 MHz)**

f. Ordem (mínima) equivalente de um filtro Butterworth capaz de atingir o mesmo decaimento na banda de transição.

Aplicar "regra de 3" para os valores encontrados acima; um filtro Butterworth de **ordem 1** tem ganho $\mathbf{20\ dB/década}$ ou $\mathbf{6\ dB/oitava}$. Arredondamentos: devem ser feitos para cima, para garantir a atenuação correta na banda de rejeição.

Ordem de filtro Butterworth equivalente ao Filtro A:

$$\frac{\left|\frac{\Delta \text{ganho}}{\text{oitava}}\right|}{6\ \text{dB/oitava}} = \frac{18\,\frac{\text{dB}}{\text{oitava}}}{6\ \text{dB/oitava}} = \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{ordem\ 3\ ou\ 4}$$

Ordem de filtro Butterworth equivalente ao Filtro B:

$$\frac{\left|\frac{\Delta \text{ganho}}{\text{década}}\right|}{20\ \text{dB/década}} = \frac{70\,\frac{\text{dB}}{\text{década}}}{20\ \text{dB/década}} = \mathbf{3,5} \rightarrow \mathbf{ordem\ 4}$$

Ordem de filtro Butterworth equivalente ao Filtro C:

$$\frac{\left|\frac{\Delta \text{ganho}}{\text{oitava}}\right|}{6\ \text{dB/oitava}} = \frac{110\,\frac{\text{dB}}{\text{oitava}}}{6\ \text{dB/oitava}} = \mathbf{18,333} \rightarrow \mathbf{ordem\ 19\ ou\ 20}$$

(4) Usando um dos circuitos do Exercício (1), com um resistor de $\mathrm{R} = 100\ \mathrm{k\Omega}$, projete um filtro **passa baixas** de primeira ordem com frequência de corte $\mathbf{f_c = 100\ kHz}$. Determine o valor da capacitância (ou indutância) arredondando para o valor comercial mais próximo (consulte valores comerciais em sites como farnell.com ou digikey.com). Após escolher o valor comercial do capacitor/indutor, recalcule a frequência de corte.

Usando o filtro 1a,

$$\tau_{RC} = R_1 C_1$$

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{\tau_{RC}} = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi R f_c} = \frac{1}{2\pi.100000.100000} = 0{,}1591549 \times 10^{-10}\mathrm{F}$$

$$C_1 = 15{,}915\ \mathrm{pF}$$

Valor comercial mais próximo: capacitor cerâmico 16 pF (100 V);
Código Farnell: MC0805N160J101A2.54MM
Datasheet
Componente alternativo: SMD Cerâmico Multilayer, 16 pF (50 V)
Código Farnell: 1865423
Datasheet

Novo valor de Frequência de corte com o capacitor comercial escolhido:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau_{Rc}} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi.100 \times 10^3.16 \times 10^{-12}} = 99{,}471\ \mathrm{kHz}$$

(5) Usando um dos circuitos do Exercício (1), com um resistor de $\mathrm{R} = 500\ \Omega$, projete um filtro **passa altas** de primeira ordem com frequência de corte $\mathbf{f_c = 1\ kHz}$. Determine o valor da capacitância (ou indutância) arredondando para o valor comercial mais próximo (consulte valores comerciais em sites como farnell.com ou digikey.com). Após escolher o valor comercial do capacitor/indutor, recalcule a frequência de corte.

Usando o filtro 1c,

$$\tau_{RL} = \frac{L_1}{R_2}$$

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{\tau_{RL}} = \frac{R_2}{L_1}$$

$$L_1 = \frac{R_2}{2\pi f_c} = \frac{500}{2\pi 1000} = 79{,}5774\ \mathrm{mH}$$

$$L_1 = 79{,}5774\ \mathrm{mH}$$

Valor comercial mais próximo: indutor com núcleo de ferrite, $L_1 = 82\ \mathrm{mH}$

Código Farnell: 1193629

Datasheet

Componente alternativo: indutor não blindado com núcleo de ar, $L_1 = 68\ \mathrm{mH}$

Código Farnell: 2062747

Datasheet

Novo valor de Frequência de corte com o indutor comercial escolhido:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau_{Rc}} = \frac{R_2}{2\pi L_1}$$

$$f_c = \frac{500}{2\pi.82 \times 10^{-3}} = 970{,}45\ \mathrm{Hz}$$

(6) Coloque os dois filtros projetados nos exercício (4) e (5) em cascata (*em série, o sinal de saída de saída de um filtro é entrada para próximo*).

a. Desenhe o circuito elétrico correspondente, indicando V_{in} e V_{out}.

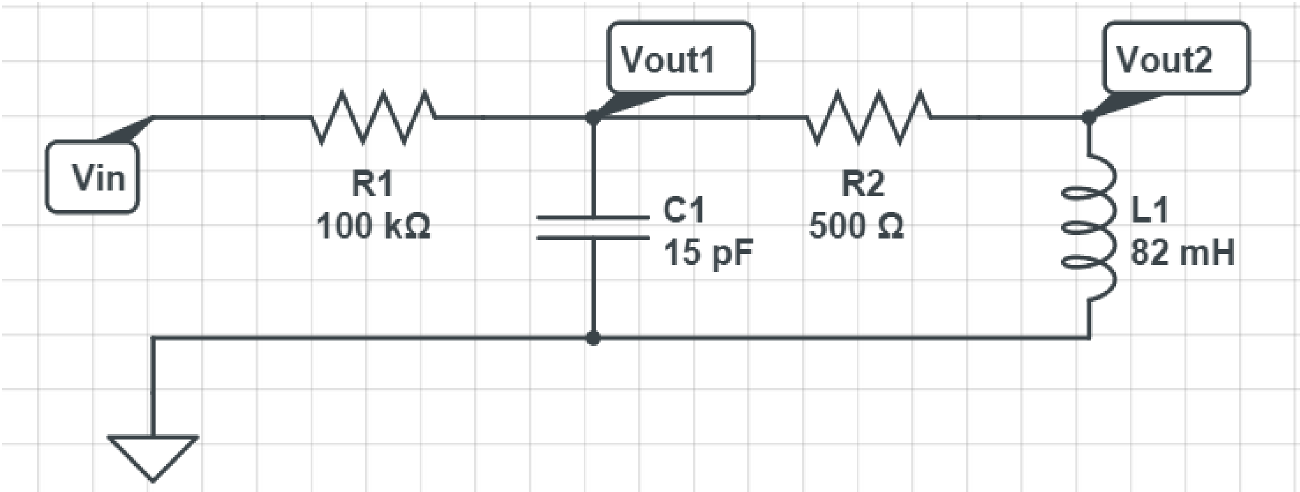


Figura 6 – Circuito equivalente da cascata dos dois filtros

b. Determine a função de transferência equivalente da cascata dos dois filtros.

Idealmente, bastaria multiplicar as duas funções de transferência:

Função de Transferência do Filtro passa-baixas 1a:

$$H_{LPF}(\omega) = \frac{V_{out_1}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

Função de Transferência do Filtro passa-altas 1c:

$$H_{HPF}(\omega) = \frac{V_{out_2}}{V_{out_1}} = \frac{j\omega L_1}{R_2 + j\omega L_1}$$

Função de transferência equivalente da cascata dos filtros:

$$H_6 = \frac{V_{out2}}{V_{in}} = H_{LPF}(\omega) \times H_{HPF}(\omega)$$

$$H_6(\omega) = \frac{V_{out_2}}{V_{in}} = \left(\frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}\right)\left(\frac{j\omega L_1}{R_2 + j\omega L_1}\right)$$

$$H_6(\omega) = \frac{V_{out_2}}{V_{in}} = \frac{j\omega L_1}{(R_2 - \omega^2 R_1 C_1 L_1) + j\omega(L_1 + R_1 R_2 C_1)}$$

Na prática, uma nova função de transferência deve ser calculada com o circuito da Figura 6.

$$H_6^{\mathrm{verdadeiro}} = \frac{V_{out_2}}{V_{in}} = \underbrace{\frac{Z_{C1}//(R_2 + Z_{L1})}{R_1 + Z_{C1}//(R_2 + Z_{L1})}}_{\substack{H_{LPF}(\omega)\ \text{modificado} \\ \text{pelo segundo estágio}}} \underbrace{\frac{Z_{L_1}}{Z_{L1} + R_2}}_{H_{HPF}(\omega)}$$

$$Z_{C1}//(R_2 + Z_{L1}) = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \times (R_2 + j\omega L_1)}{\frac{1}{j\omega C_1} + R_2 + j\omega L_1} = \frac{R_2 + j\omega L_1}{1 - \omega^2 C_1 L_1 + j\omega C_1 R_2}$$

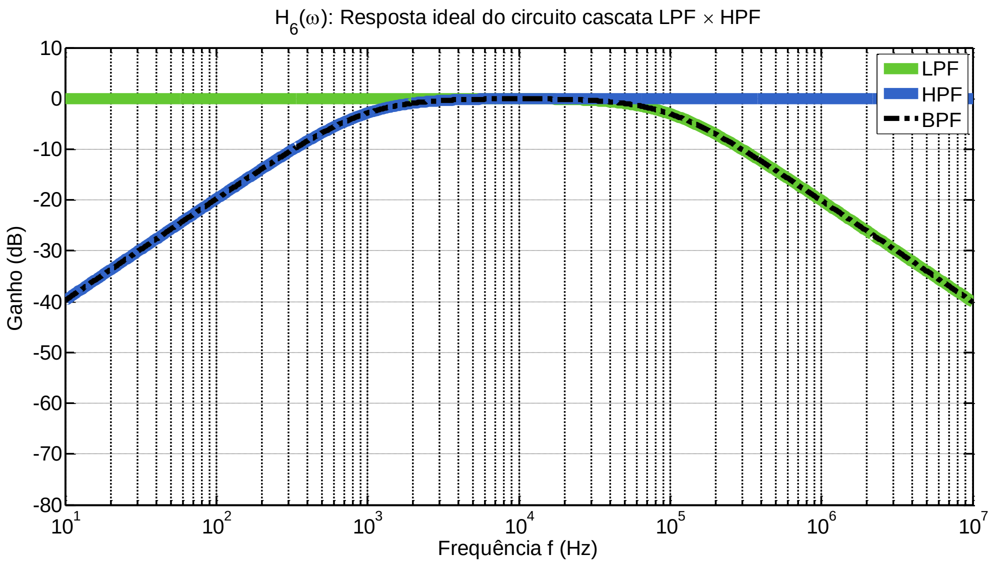
$$H_6^{\mathrm{verdadeiro}} = \frac{V_{out_2}}{V_{in}} = \frac{\frac{R_2 + j\omega L_1}{1 - \omega^2 C_1 L_1 + j\omega C_1 R_2}}{R_1 + \frac{R_2 + j\omega L_1}{1 - \omega^2 C_1 L_1 + j\omega C_1 R_2}} H_{HPF}(\omega)$$

$$H_6^{\mathrm{verdadeiro}} = \frac{V_{out_2}}{V_{in}} = \frac{R_2 + j\omega L_1}{R_1 + R_2 - \omega^2 C_1 L_1 R_1 + j\omega(L_1 + C_1 R_1 R_2)} H_{HPF}(\omega)$$

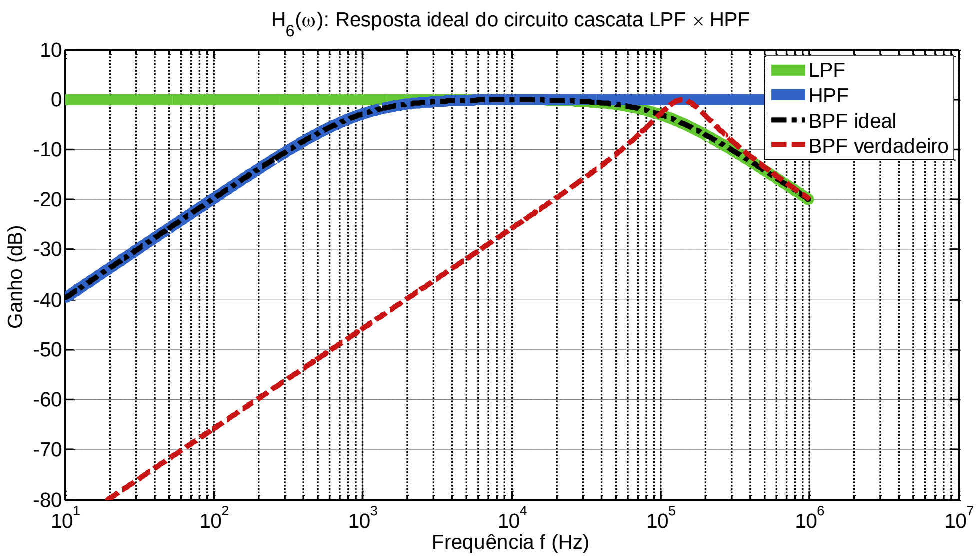
c. Qual o tipo de filtro resultante?
Qual o intervalo da banda passante e da banda de rejeição?

Devido à escolha das frequências de corte, o filtro cascata resultante é um filtro passa-bandas (BPF).

Idealmente, a resposta da função de transferência equivalente deveria ser a soma dos ganhos em deciBel dos dois filtros em cascata, conforme ilustra a figura abaixo.



Na prática, primeiro estágio é afetado pela colocação do segundo estágio em cascata. Assim, a resposta verdadeira do do filtro (conforme mostrado no item anterior) fica:



O intervalo da banda-passante <u>ideal</u> seria:

$$\mathbf{f}_{\text{banda passante}} \in (970{,}45\ \text{Hz} - 99{,}471\ \text{kHz}\ )$$

O intervalo da banda-passante <u>verdadeira</u>

(considerando ganhos acima de -10 dB) é:

$$\mathbf{f}_{\text{banda passante}} \in (55\ \text{kHz} - 365\ \text{kHz}\ )$$

O intervalo da banda de rejeição <u>ideal</u> (assumindo rejeição abaixo de -20 dB de atenuação) é:

$$\mathbf{f}_{\text{banda rej.}} \in (0 - 100\ \text{Hz}) \cup (1\ \text{MHz}, +\infty\ )$$

O intervalo da banda de rejeição <u>verdadeira</u> (assumindo rejeição abaixo de -20 dB de atenuação) é:

$$\mathbf{f}_{\text{banda rej.}} \in (0 - 20\ \text{kHz}) \cup (1\ \text{MHz}, +\infty\ )$$

Na prática seria necessário reprojetar o filtro passa-bandas para obter uma resposta parecida com a ideal.

É possível obter a resposta ideal colocando os filtros LPF e HPF em cascata se forem utilizados filtros ativos com amplificadores operacionais em vez de filtros passivos.