Introdução aos Sinais e Sistemas

Deise Monquelate Arndt
deise.arndt@ifsc.edu.br

Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações
IFSC - Campus São José

Índice

Sinais

- Um sinal pode ser definido como um conjunto de dados ou de informação.
- Matematicamente, o sinal é representado como uma função da variável indepentende t. Usualmente t representa o tempo. Assim o sinal é representado por $\mathrm{x}(t)$.

Sinal de energia e Sinal de Potência

- Quando trabalhamos com sinais precisamos ter uma medida de sua "força";
- Uma medida conveniente do tamanho de um sinal é sua energia, quando ela for finita.
- A energia do sinal é dada por:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \tag{1}$$

- Se x(t) for uma função complexa, a sua energia pode ser obtida por:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)^2|dt \tag{2}$$

Sinal de energia e Sinal de Potência

- Uma condição necessária para a energia ser finita e a amplitude do sinal $\longrightarrow 0$ quanto $|t| \longrightarrow \infty$.

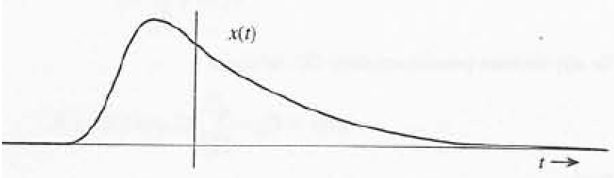


Figura : Sinal com energia finita

- Caso contrário a integral da equação 1 não irá convergir.

Sinal de energia e Sinal de Potência

- Se a energia do sinal for infinita, uma medida apropriada do sinal é a potência, se ela existir!
- A potência do sinal é a energia média do sinal.
- A potência do sinal é dada por:

$$P_x = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt \tag{3}$$

- Se x(t) for uma função complexa, a sua potência pode ser obtida por:

$$P_x = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x^2(t)|dt \tag{4}$$

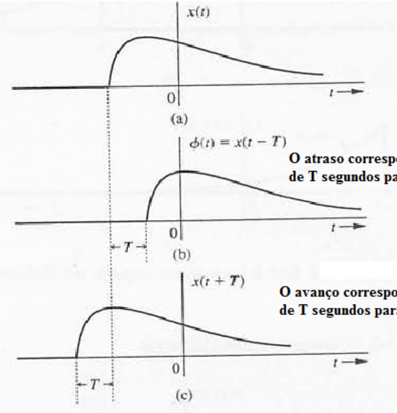
Operações úteis com Sinais

- Algumas operações úteis com sinais são:

1. Deslocamento Temporal;
2. Escalonamento Temporal;
3. Reversão Temporal;
4. Operações Combinadas.

Deslocamento Temporal

- No deslocamento temporal o sinal sofre um processo de atraso ou avanço;



O atraso corresponde a um deslocamento de T segundos para a direita do sinal x(t)

O avanço corresponde a um deslocamento de T segundos para a esquerda do sinal x(t)

Escalonamento Temporal

- A compressão ou expansão do sinal x(t), no tempo, é chamada de escalonamento temporal;
- Um sinal comprimido por um fator $a = 3$, por exemplo, é representado por:

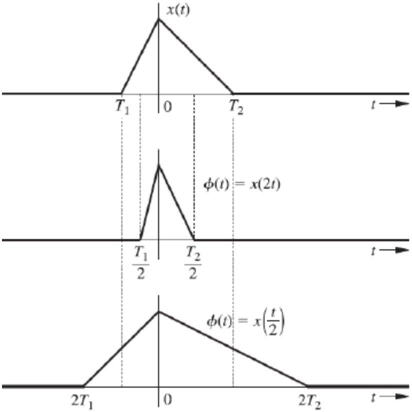
$$\phi(t) = x(at) = x(3t)$$

- Já um sinal expandido por um fator $a = 3$, por exemplo, é dado por:

$$\phi(t) = x(\frac{t}{3})$$

Escalonamento Temporal

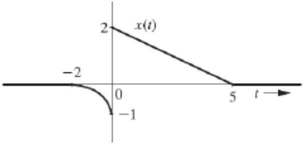
- Exemplo do sinal comprimido e expandido por um fator a =2.



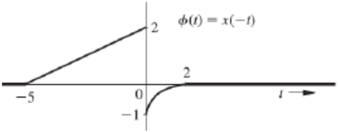
Reversão Temporal

- A reversão temporal consiste em uma rotação de 180º, do sinal x(t), em torno do eixo vertical;
- A reversão temporal é dada por:

$$\phi(t) = x(-t)$$



(a)



Operações Combinadas

- Pode-se utilizar operações mais complexas através da combinação das operações até aqui estudadas.
- Uma operação combinada é representada por:

$$\phi(t) = x(at - b)$$

- Esta operação pode ser realizadas de duas formas:
  1. Desloca-se x(t) de b resultando em $x(t-b)$, desloca-se $x(t-b)$ pelo fator a, o que resulta $x(at-b)$;
  2. Escalona-se x(t) pelo fator a resultando em $x(at)$, desloca-se temporalmente de b/a, isto é, subtitui-se t po $t-(b/a)$ para obter-se $x[a(t-b/a)]$ o que resulta em $x(at-b)$;

Classificação dos Sinais

- Existem diversas classes de sinais. Dentre eles veremos:

  1. Sinais contínuos e discretos no tempo;
  2. Sinais analógicos e digitais;
  3. Sinais periódicos e aperiódicos;
  4. Sinais determinísticos e aleatórios;
  5. Sinais causais e não causais.

Sinais contínuos e discretos no tempo

- Um sinal contínuo no tempo é aquele especificado em todos os valores de tempo;
- Um sinal discreto no tempo é aquele especificado apenas em alguns intantes de tempo.

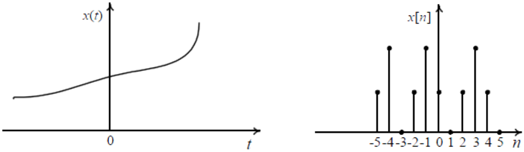


Figura : Sinal contínuo no tempo e Sinal discreto no tempo.

Sinais analógicos e digitais

- Um sinal analógico é aquele cujo valores de amplitude pode assumir infinitos valores dentro de uma faixa contínua;
- Um sinal digital é aquele cujo valores de amplitude podem assumir apenas alguns valores.

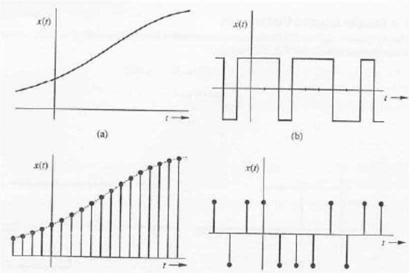


Figura : (a) Analógico, contínuo no tempo (b) Digital, contínuo no tempo (c) Analógico, discreto no tempo (d) Digital, discreto no tempo

Sinais periódicos e aperiódicos

- Um sinal x(t) é dito periódico com período T, se para qualquer valor positivo de T

$$x(t+T) = x(t)$$

para todo t

- Se o sinal x(t) não for periódico, ele é dito aperiódico.

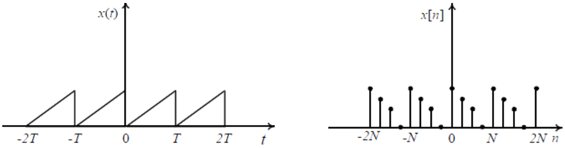


Figura : Exemplo de sinais periódicos

Sinais determinísticos e aleatórios

- Um sinal determinístico é aquele cujos valores podem ser especificados a qualquer instante de tempo, ou seja, existe uma função que determina o sinal.

- Um sinal aleatório é aquele cujos valores não podem ser determinados. Estes sinais admitem apenas uma descrição probabilística.

Sinais causais e não causais

- Um sinal é dito causal se ele começar a partir do instante $t = 0$;
- Se o sinal iniciar em $t < 0$ e se extender a $t > 0$ ele é chamado de não causal

Modelos úteis de Sinais

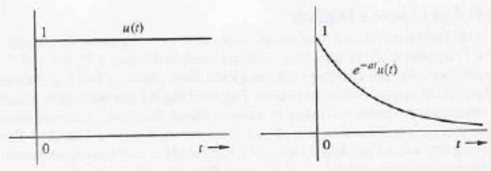
- Em sinais e sistemas utiliza-se frequentemente modelos de sinais. Estes modelos além de servir de base para a representação e outros sinais, também são utilizados para simplificação no uso de modelos mais simples;
- Dentre os modelos mais utilizados destaca-se:
  - Função Degrau unitário $u(t)$
  - Função Impulso unitário $\delta(t)$
  - Função rampa $r(t)$

Função degrau unitário $u(t)$

- O degrau unitário é definido por:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- A função degrau permite transformar um sinal de duração infinita em um sinal causal.



Função Impulso unitário $\delta(t)$

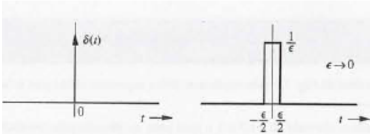
- A função impulso unitária, também conhecida como Delta de Dirac $\delta(t)$ é definida por:

$$\delta(t) = 0$$

para $t \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Geometricamente o impulso unitário pode ser visto como:



Função Rampa $r(t)$

- A função rampa corresponde a uma ação que cresce linearmente no tempo a partir de uma função nula. A função rampa $r(t)$ é definida por:

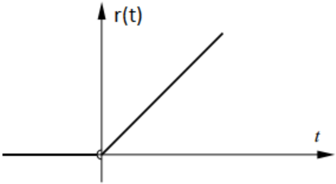
$$r(t) = \begin{cases} r(t) = 0 & parat > 0 \\ r(t) = t & parat > 0 \end{cases}$$

- De mameira equivalente podemos escrever que:

$$r(t) = tu(t)$$

Função Rampa $r(t)$

- Geometricamente a função rampa pode ser visto como:



Propriedades da Função Impulso unitário $\delta(t)$

- Multiplicação de uma função $\phi(t)$ contínua em $t = 0$ pela função impulso unitário localizado em $t = 0$:

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$$

- Multiplicação de uma função $\phi(t)$ contínua em $t = 0$ pela função impulso unitário localizado em $t = T$:

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T)$$

Propriedades da Função Impulso unitário $\delta(t)$

- Propriedade de amostragem da função impuslo unitário:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt$$

$$= \phi(t)$$

- Portanto, a área sob o produto de uma função com o impulso é igual ao valor da função no instante em que o impulso é localizado.

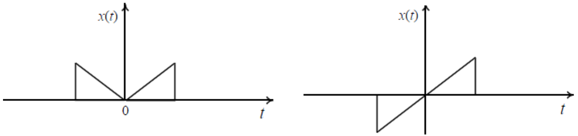
Funções Pares e Ímpares

- A simetria nos sinais permite, em muitos casos, a simplificação em sinais e sistemas facilitando os cálculos.
- Um sinal x(t) é classificado como par se:

$$x(t) = x(-t)$$

- Um sinal x(t) é classificado como ímpar se:

$$x(t) = -x(-t)$$



Propriedades das funções Pares e Ímpares

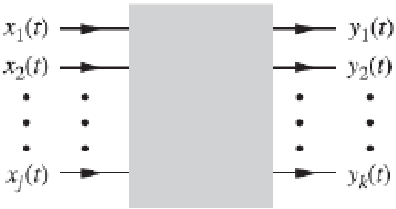
- Função par x Função ímpar = Função ímpar
- Função ímpar x Função ímpar = Função ímpar
- Função par x Função par = Função par

- Todo o sinal x(t) pode ser descrito como a soma das suas componentes pares e ímpares:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]}_{\text{ímpar}}$$

Sistemas

- Um sistema pode ser definido como uma entidade que manipula um ou mais sinais realizando uma determinada função, produzindo assim, novos sinais.
- Um sistema físico pode ser caracterizado por sua relação entrada/saída
- Desta forma, um sistema pode ser representado como uma caixa preta com um conjunto de sinais de entrada $x_1(t), x_2(t), ...x_j(t)$ e saída $y_1(t), y_2(t), ...y_k(t)$



Classificação dos sistemas

- Os sistemas podem ser classificados em:
  1. Lineares e não Lineares;
  2. Variantes e Invariantes no tempo;
  3. Com memória e sem memória;
  4. Causais e não Causais;
  5. Contínuos e discretos no tempo;
  6. Inversíveis e não inversíveis;
  7. Estáveis e Instáveis.

Sistema Linear e não Linear

- Um sistema é linear se sua saída é proporcional a sua entrada;
- Para um sistema linear, se:

$$x_1 \to y_1$$

e

$$x_2 \to y_2$$

então :

$$K_1x_1 + K_2x_2 \to K_1y_1 + K_2y_2$$

- Um sistema Linear permite que cada entrada seja considerada separadamente
- Se o sistema não satisfaz as equações acima ele é dito não linear.

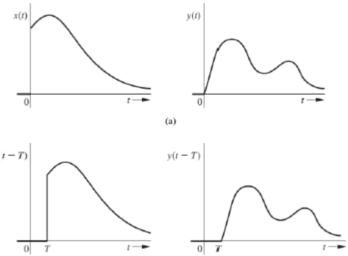
Sistema Variante e Invariante no tempo

- Um sistema é dito Invariante no tempo se um deslocamento no tempo (atraso ou avanço) no sinal de entrada resulta no mesmo deslocamento no sinal de saída, ou seja, se:

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

então:

$$x(t - T) \rightarrow y(t - T)$$



Sistema com mémoria e sem memória

- Um sistema é dito sem memória se a saída em um dado instante de tempo t depende somente da entrada naquele mesmo instante de tempo t;

Exemplo : Circuito Resistivo

- Se a saída no instante t dependa de valores passados, o sistema é dito com memória.

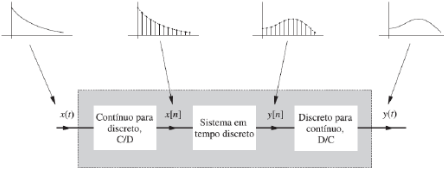
Exemplo: Circuitos RLC, RC e RL

Sistema Causal e não Causal

- Um sistema é dito causal se a saída em um instante t_0 depende apenas de valores da entrada para $t \leq 0$;
- A saída de sistemas não causal não depende de valores futuros da entrada. Depende apenas de valores presentes ou passados do sinal de entrada;
- Não é possível obter um sinal de saída antes de um sinal de entrada ser aplicado ao sistema. Se o sistema não obedecer esta regra ele é dito não causal.

Sistema em tempo Contínuo e tempo Discreto

- Um sistema contínuo é aquele cujas entradas e saídas são sinais contínuos no tempo;
- Um sistema discreto é aquele cujas entradas e saídas são sinais discretos no tempo;
- Sinais contínuos podem ser processados por sistemas discretos.



Sistema Inversível e não Inversível

- Um sistema S onde a entrada x(t) pode ser obtida a partir da saída y(t) é dito inversível;
- Quando várias entradas diferentes resultam na mesma saída, é imposível obter a entrada a partir da saída, desta forma o sistema é dito não inversível;

Sistema Estável e Instável

- A estabilidade do sistema pode ser interna ou externa;
- O sistema pode ser classificado como estável e instável segundo o critério de estabilidade externa;
- Um sistema é estável (BIBO estável) se uma entrada limitada resulta em uma saída limitada;
- Caso uma entrada limitada resulte em uma saída ilimitada, o sistema é dito instável.