

**INSTITUTO
FEDERAL**
Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação 5

Códigos Convolucionais

Curso: Engenharia de Telecomunicações
Disciplina: COM29008 - Sistemas de Comunicação II
Professor: Marcio Henrique Doniak e Roberto Wanderley da Nobrega

Aluno

João Pedro Menegali Salvan Bitencourt

22 de julho de 2024

Sumário

Exercício	2
a) Determine a taxa e a ordem de memória do código convolucional.	2
b) Esboce o diagrama de blocos do codificador.	2
c) Esboce o diagrama de estados do código.	3
d) Determine os parâmetros (n' , k') do código de bloco resultante, com $h = 5$ blocos e terminação no estado zero.	3
e) Codifique a mensagem 11101. Insira a cauda apropriada.	4
f) Decodifique a palavra recebida 110110110111010101101 utilizando o algoritmo de Viterbi. .	4
g) Determine a distância livre do código através do método de Mason.	5

Exercício

Considere um código convolucional com matrizes geradoras dadas por

$$G_0 = [1 \ 1 \ 1] \quad G_1 = [1 \ 0 \ 1] \quad G_2 = [0 \ 1 \ 1]$$

a) Determine a taxa e a ordem de memória do código convolucional.

Sendo $n = 3$, $k = 1$, a taxa do código convolucional é dada por:

$$R = \frac{k}{n} = \frac{1}{3}$$

A ordem de memória é $m = 2$.

b) Esboce o diagrama de blocos do codificador.

Sendo:

$$v_t = u_t G_0 + u_{t-1} G_1 + u_{t-2} G_2 = [u_t^{(0)}] [1 \ 1 \ 1] + [u_{t-1}^{(0)}] [1 \ 0 \ 1] + [u_{t-2}^{(0)}] [0 \ 1 \ 1]$$

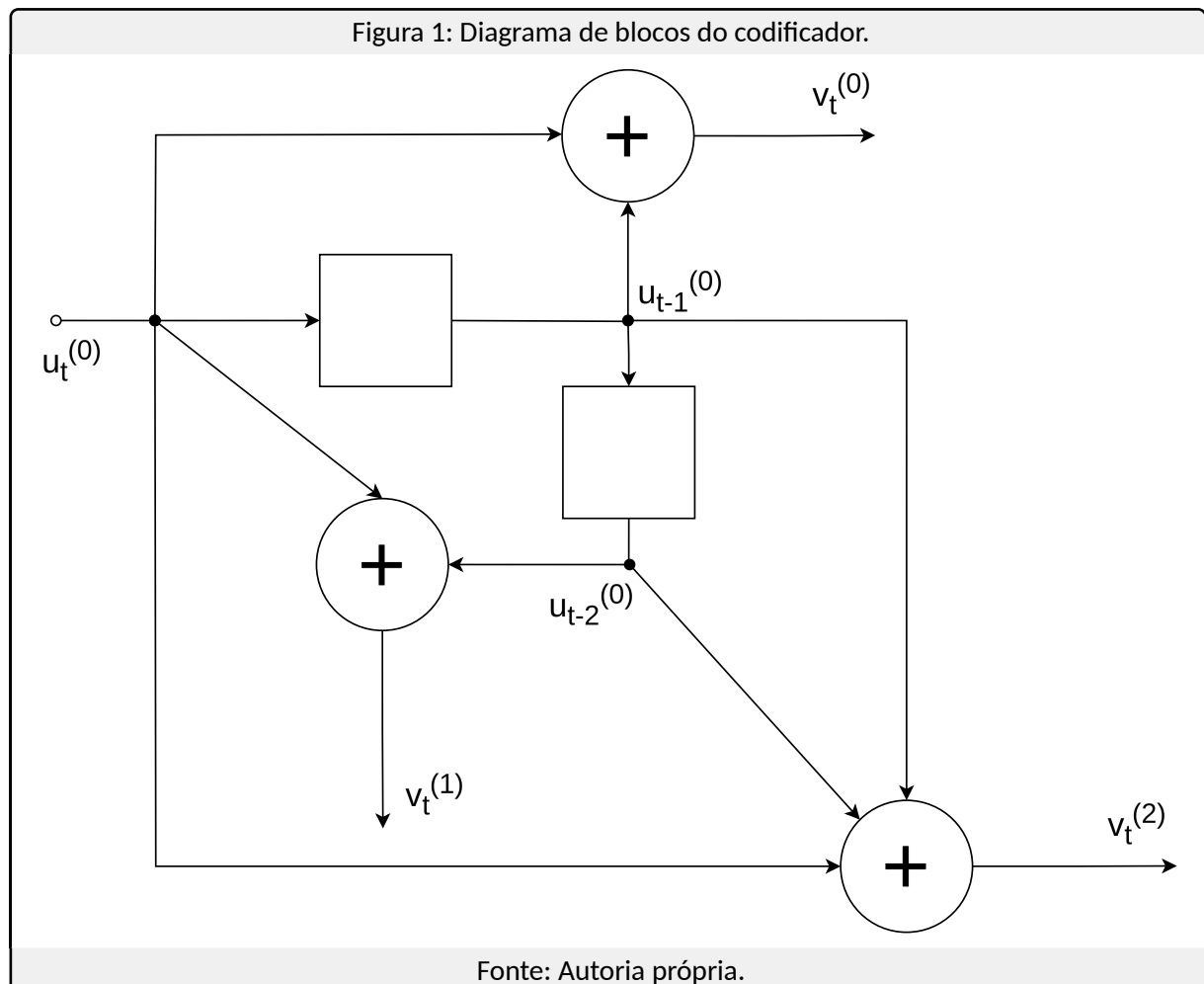
$$v_t = \begin{bmatrix} u_t^{(0)} & u_t^{(0)} & u_t^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{t-1}^{(0)} & 0 & u_{t-1}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & u_{t-2}^{(0)} & u_{t-2}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$v_t = \begin{bmatrix} u_t^{(0)} + u_{t-1}^{(0)} & u_t^{(0)} + u_{t-2}^{(0)} & u_t^{(0)} + u_{t-1}^{(0)} + u_{t-2}^{(0)} \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$v_t^{(0)} = u_t^{(0)} + u_{t-1}^{(0)} \quad v_t^{(1)} = u_t^{(0)} + u_{t-2}^{(0)} \quad v_t^{(2)} = u_t^{(0)} + u_{t-1}^{(0)} + u_{t-2}^{(0)}$$

Dessa forma, o diagrama de blocos do codificador é:



c) Esboce o diagrama de estados do código.

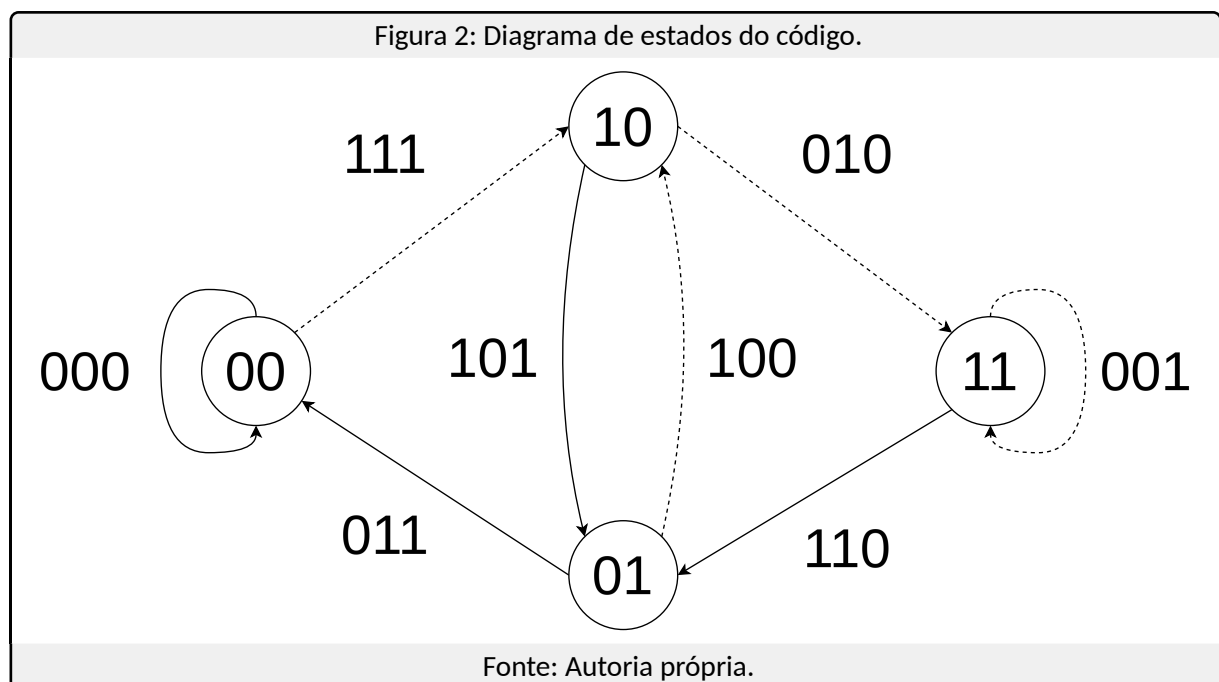
Sendo:

$$v_t^{(0)} = u_t^{(0)} + u_{t-1}^{(0)} \quad v_t^{(1)} = u_t^{(0)} + u_{t-2}^{(0)} \quad v_t^{(2)} = u_t^{(0)} + u_{t-1}^{(0)} + u_{t-2}^{(0)}$$

Dado os dois blocos de atraso, há $2^2 = 4$ estados possíveis.

Estado	Entrada	Próximo estado	u_t	u_{t-1}	u_{t-2}	$v_t^{(0)}$	$v_t^{(1)}$	$v_t^{(2)}$
00	0	00	0	0	0	0	0	0
	1	10	1	0	0	1	1	1
10	0	01	0	1	0	1	0	1
	1	11	1	1	0	0	1	0
01	0	00	0	0	1	0	1	1
	1	10	1	0	1	1	0	0
11	0	01	0	1	1	1	1	0
	1	11	1	1	1	0	0	1

Portanto, o diagrama de estados do código é:



d) Determine os parâmetros (n' , k') do código de bloco resultante, com $h = 5$ blocos e terminação no estado zero.

Sendo $h = 5$ e $k = 1$, tem-se que:

$$k' = h \cdot k = 5 \cdot 1 = 5 \rightarrow k' = 5$$

Com a técnica de terminação no estado zero, tem-se que:

$$n' = (h + m)n = (5 + 2)3 = 21 \rightarrow n' = 21$$

e) Codifique a mensagem 11101. Insira a cauda apropriada.

Sendo:

$$v_t^{(0)} = u_t^{(0)} + u_{t-1}^{(0)} \quad v_t^{(1)} = u_t^{(0)} + u_{t-2}^{(0)} \quad v_t^{(2)} = u_t^{(0)} + u_{t-1}^{(0)} + u_{t-2}^{(0)}$$

Iniciando com $u_t^{(0)} = 0$, $u_{t-1}^{(0)} = 0$ e $u_{t-2}^{(0)} = 0$ e com a mensagem 11101, a cauda é mk = 2 zeros. Portanto:

$$u_{\text{cauda}} = 1110100$$

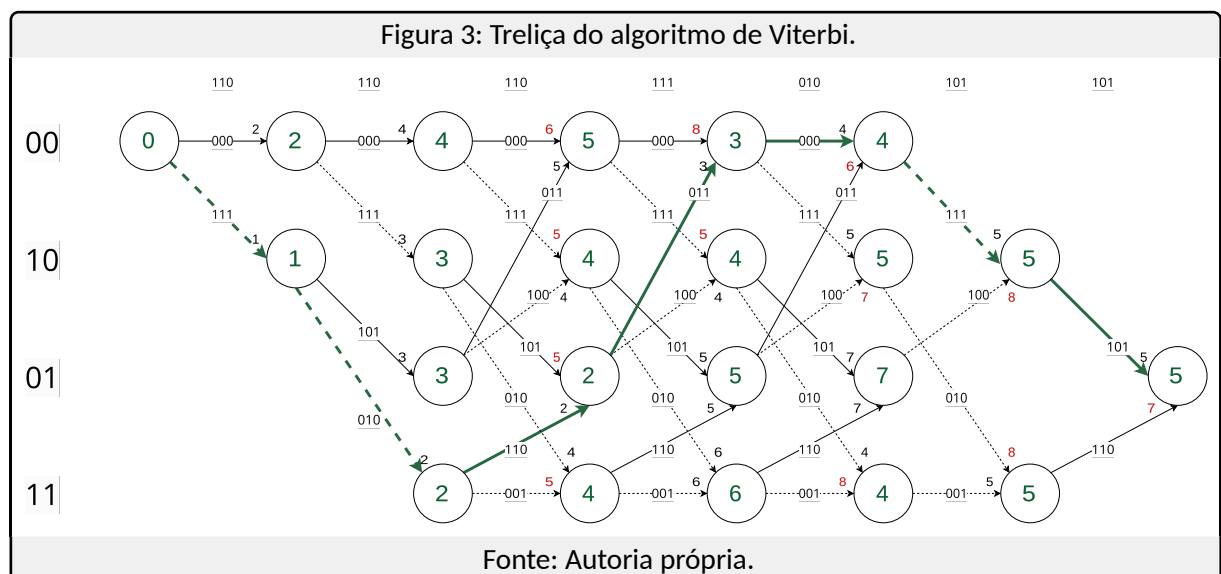
Dessa forma, tem-se:

Bit	$u_t^{(0)}$	$u_{t-1}^{(0)}$	$u_{t-2}^{(0)}$	$v_t^{(0)}$	$v_t^{(1)}$	$v_t^{(2)}$
	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1

Portanto, a mensagem codificada é: $v = 111\ 010\ 001\ 110\ 100\ 101\ 011$

f) Decodifique a palavra recebida 110110110111010101101 utilizando o algoritmo de Viterbi.

Sendo a palavra recebida $b = 110\ 110\ 110\ 111\ 010\ 101\ 101$, constrói-se a seguinte treliça:



Dessa forma:

$$\hat{v} = 111\ 010\ 110\ 011\ 000\ 111\ 101 \quad (5 \text{ erros})$$

Portanto a palavra decodificada é:

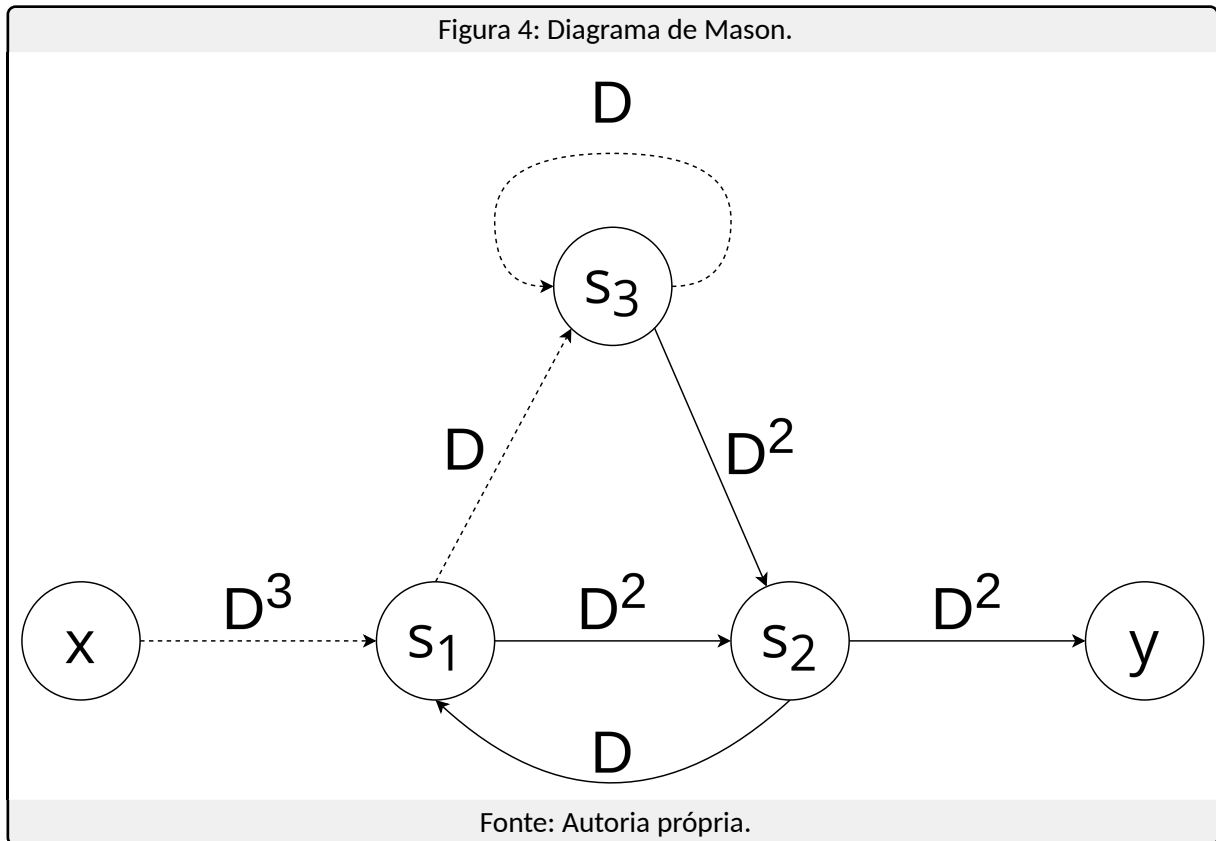
$$\hat{u} = 1100010$$

g) Determine a distância livre do código através do método de Mason.

Seja:

$$s_1 = 10 \quad s_2 = 01 \quad s_3 = 11$$

O diagrama de Mason é:



Dessa forma, as equações de estado são:

$$\begin{cases} s_1 = D^3x + DS_2 \\ s_2 = D^2s_1 + D^2s_3 \\ s_3 = DS_1 + DS_3 \\ y = D^2s_2 \end{cases}$$

Resolvendo a equação de s_3 :

$$s_3 = DS_1 + DS_3$$

$$s_3 - DS_3 = DS_1$$

$$s_3(1 - D) = DS_1$$

$$s_3 = \frac{DS_1}{1 - D}$$

Substituindo s_3 na equação de s_2 :

$$s_2 = D^2s_1 + D^2s_3$$

$$s_2 = D^2s_1 + D^2\left(\frac{DS_1}{1 - D}\right)$$

$$s_2 = D^2 s_1 + \frac{D^3 s_1}{1 - D}$$

$$s_2 = D^2 s_1 \left(1 + \frac{D}{1 - D} \right)$$

$$s_2 = D^2 s_1 \left(\frac{1 - D + D}{1 - D} \right)$$

$$s_2 = \frac{D^2 s_1}{1 - D}$$

Substituindo s_2 na equação de s_1 :

$$s_1 = D^3 x + D s_2$$

$$s_1 = D^3 x + D \left(\frac{D^2 s_1}{1 - D} \right)$$

$$s_1 = D^3 x + \frac{D^3 s_1}{1 - D}$$

Multiplicando tudo por $(1 - D)$:

$$s_1(1 - D) = D^3 x(1 - D) + D^3 s_1$$

$$s_1 - D s_1 = D^3 x - D^4 x + D^3 s_1$$

$$s_1 - D s_1 - D^3 s_1 = D^3 x - D^4 x$$

$$s_1(1 - D - D^3) = D^3 x(1 - D)$$

$$s_1 = \frac{D^3 x(1 - D)}{1 - D - D^3}$$

Substituindo s_2 na equação de y :

$$y = D^2 s_2$$

$$y = D^2 \left(\frac{D^2 s_1}{1 - D} \right)$$

$$y = \frac{D^4 s_1}{1 - D}$$

Substituindo s_1 na equação de y encontrada acima:

$$y = \frac{D^4 s_1}{1 - D}$$

$$y = \frac{D^4 \left(\frac{D^3 x(1 - D)}{1 - D - D^3} \right)}{1 - D}$$

$$y = \frac{\frac{D^7 x(1 - D)}{1 - D - D^3}}{1 - D}$$

$$y = \frac{D^7 x(1 - D)}{1 - D - D^3} \cdot \frac{1}{1 - D}$$

$$y = \frac{D^7 x(1 - D)}{(1 - D - D^3)(1 - D)}$$

$$y = \frac{D^7 x}{1 - D - D^3}$$

Sendo assim, a função de transferência de peso é:

$$T(D) = \frac{y}{x} = \frac{D^7}{1 - D - D^3}$$

Portanto, a distância livre do código é $d_{\text{free}} = 7$, já que o maior expoente de D é 7.