INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS DE SÃO JOSÉ
CURSO TÉCNICO INTEGRADO EM TELECOMUNICAÇÕES

Análise de Circuitos I I

UNIDADE I

Ferramentas Matemáticas

FASORES

SAUL SILVA CAETANO & ALEXANDRE MOREIRA

FERRAMENTAS MATEMÁTICAS PARA ANÁLISE DE CIRCUITOS EM CORRENTE ALTERNADA

2.1. FASORES

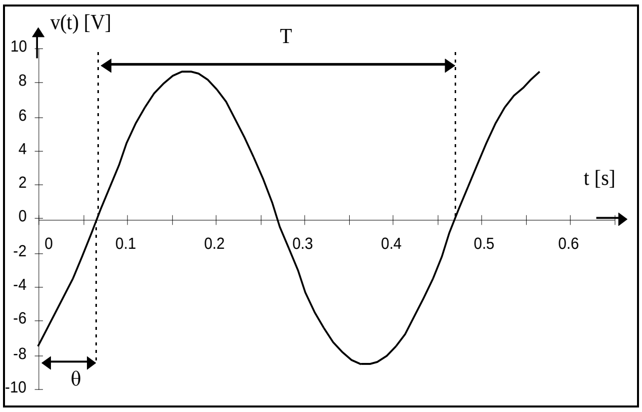
2.1.1 Introdução

Até agora conhecemos duas representações matemáticas da tensão e da corrente alternada.

Tensão

Função: $v(t) = V_p \operatorname{sen}(wt - \theta)$

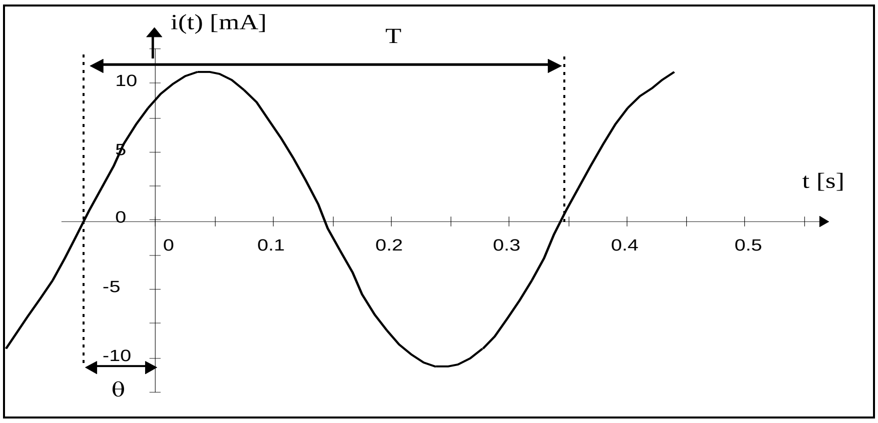
Gráfico:



Corrente

Função: $i(t) = I_p \operatorname{sen}(wt + \theta)$

Gráfico:



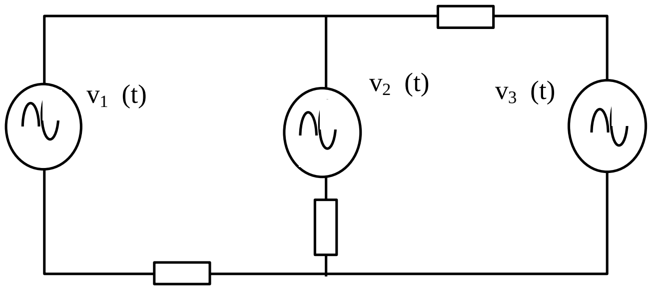
Porém, estas duas formas de representação matemática, não fornecem métodos práticos para resolução de circuitos elétricos. Precisamos então, de uma nova representação matemática para "v" e "i".

Dos estudos até aqui realizados podemos perceber que os parâmetros mais importantes da tensão e da corrente alternada são:

V_p, I_p, ω, f, T θ

Se considerarmos que no circuito que iremos analisar, todas as fontes, de tensão ou de corrente, possuem a mesma freqüência angular (ω), podemos omitir (ω) na representação de "v" e "i".

Por exemplo:

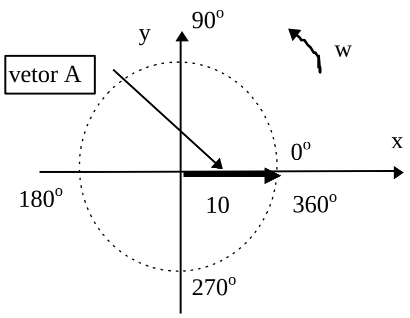


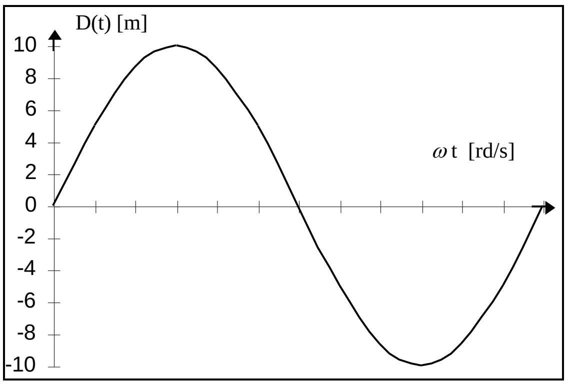
$v_1(t) = 10$ sen $(500t + 0^o)$
$v_2(t) = 5{,}0$ sen $(500t + 45^o)$
$v_3(t) = 2{,}5$ sen $(500t + 20^o)$

As tensões v1, v2 e v3 apresentam ω = 500 rad/s, portanto ω não diferencia as tensões e pode ser omitida na representação de v_1, v_2, v_3. Resta então, a necessidade de diferenciar v_1, v_2, v_3 em função de Vp e θ.

2.1.2 Conceito de fasor

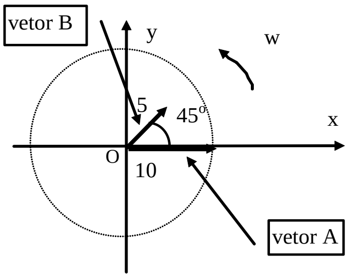
Imagine um vetor (uma seta) preso em uma das suas extremidades e girando.





Colocando um plano x - y, com origem na extremidade presa do vetor, e traçando o gráfico do deslocamento da sua ponta livre, em relação ao eixo y, temos uma senóide.
Sendo que a amplitude máxima da senóide corresponde ao comprimento do vetor (módulo).

Se colocarmos outro vetor menor, preso ao mesmo ponto e girando com a mesma freqüência, porém deslocado do vetor (A) de 45^o, teremos num determinado momento o seguinte diagrama.



Do diagrama acima podemos obter a amplitude e a defasagem entre as senóides produzidas por (A) e (B), isto é:

deslocamento máximo de (A) = 10
deslocamento máximo de (B) = 5,0
defasagem entre (A) e (Ox) = 0^o
defasagem entre (B) e (Ox) = 45^o

Considerando o eixo x como eixo real e o eixo y como eixo imaginário, podemos representar os vetores (A) e (B) por números complexos:

Forma polar		Forma retangular
$A = 10 \angle 0^o$	$\Rightarrow$	$10 + j\,0$
$B = 5 \angle 45^o$	$\Rightarrow$	$3{,}53 + j3{,}53$

Considere agora que o vetor (A) é a representação da tensão v_1 que o vetor (B) é a representação da tensão v_2. Para isso, o tamanho do vetor (A) será proporcional ao valor de pico de v_1 e o tamanho de (B) proporcional ao valor de pico de v_2. Temos então:

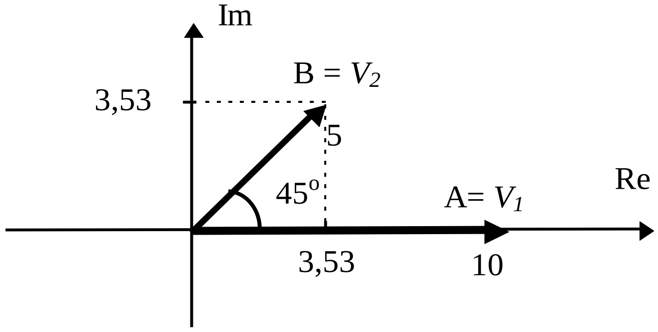


Diagrama Fasorisal

$V_1 = Vp_1 \angle\theta = 10 \angle 0$ $\Rightarrow V_1 = 10$ (V)
$V_2 = Vp_2 \angle\theta = 5{,}0\angle 45^o$(V) $\Rightarrow V_2 = 3{,}53 + j3{,}53$(V)

Obs: Para a corrente também valem as mesmas considerações.

Os vetores acima são chamados de fasores e são definidos da seguinte forma:

Fasor é um número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senóide

FASOR -Vetor girante no tempo que representa a magnitude (módulo) e o ângulo de fase (argumento) de uma tensão ou corrente sinusoidal no domínio freqüência.

$V = Vp \angle \theta^o$ (V) $\qquad\qquad$ $I = Ip \angle \theta^o$ (A)

módulo $\qquad$ argumento $\qquad$ módulo $\qquad$ argumento

Para diferenciar uma tensão (ou corrente) fasorial de uma tensão (ou corrente) não fasorial, alguns livros utilizam a seguinte notação:

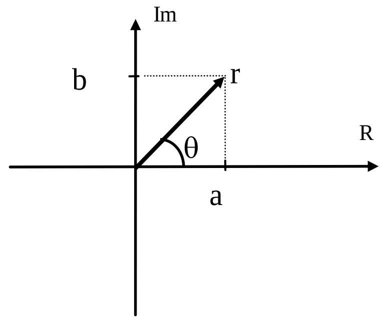
v - "*v*" minúsculo para tensão não fasorial (v(t));
$\dot{V}$ - "v" maiúsculo com ponto para tensão fasorial;
i - "*i*" minúsculo para corrente não fasorial (i(t));
$\dot{I}$ - "i" maiúsculo com ponto para corrente fasorial;

2.1.3 Conversão de Coordenadas Polares em Coordenadas Retangulares

Dado um número complexo na forma polar (r $\angle\theta$) representado graficamente como mostra a figura abaixo, podemos converte-lo para a forma retangular (a + j b) aplicando o Teorema de Pitágoras.

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r \, . \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad b = r \, . \operatorname{sen}\theta$$



2.1.4 Conversão de Coordenadas Retangulares em Coordenadas Polares

Dado um número complexo na forma retangular (a + j b) conforme o gráfico anterior, podemos converte-lo para a forma polar (r $\angle\theta$) aplicando o mesmo Teorema de Pitágoras.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad\qquad \theta = tg^{-1}\frac{b}{a}$$

2.1.5 Exemplo do uso de fasores para cálculo de tensões e correntes

A representação fasorial é importante, pois nos permite somar grandezas senoidais sem usar a função do domínio tempo ou a representação gráfica da onda.

Antes de exemplificarmos com valores de tensão ou corrente vejamos genericamente como realizar certas operações matemáticas dado dois números complexos:

$$(X = a + j b) \;\text{ e }\; (Y = c + j d)$$

Adição:

$X + Y = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$

Subtração:

$X - Y = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$

Multiplicação na forma retangular:

$X . Y = (a + jb) . (c + jd) = ac + jad + jbc + j2bd = (ac - bd) + j(ad + bc)$

Multiplicação na forma polar:

$X . Y = |X| \angle \theta_x \; . \; |Y| \angle \theta_y = |X| \, . \, |Y| \angle (\theta_x + \theta_y)$

onde |X| é o módulo de X

Divisão na forma retangular:

$X / Y = (a + jb) / (c + jd)$

para efetuarmos a divisão na forma retangular devemos multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

$$\frac{X}{Y} = \frac{(a + jb) . (c - jd)}{(c + jd) . (c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc + ad)}{(c^2 + d^2)}$$

Divisão na forma polar:

$X / Y = |X| \angle \theta_x \; / \; |Y| \angle \theta_y = |X| / |Y| \angle (\theta_x - \theta_y)$

Vejamos um exemplo numérico da soma de duas tensões senoidais :

$v_1(t) = 10 \text{ sen } (1000t + 10^o)$ V $\qquad v_2(t) = 5 \text{ sen}(1000t - 60^o)$ V

Somando as senoides temos:
$v_T(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad \Rightarrow \quad 10 \text{ sen}(1000t + 10) + 5 \text{ sen}(1000t - 60^o)$ V

Para resolver utilizamos o conceito de fasor:
$v_T(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_T = 10 \angle 10^o + 5 \angle -60^o$ V

convertendo para forma retangular teremos
$(a + jb) + (c + jd) \quad \Rightarrow \; (9{,}85 + 1{,}74j) + (2{,}5 - 4{,}33j) = (12{,}35 - 2{,}59j)$ V

convertendo para forma polar teremos:
$\dot{V}_T = (a + c) + j(b + d) \Rightarrow \dot{V}_T = Vp \angle \theta_T \quad \Rightarrow \; \dot{V}_T = 12{,}62 \angle -11{,}84^o$ V

O resultado escrito na função de seno será:
$v_T(t) = 12{,}62 \text{ sen } (1000t - 11{,}84^o)$ V

2.1.6 Exercícios:

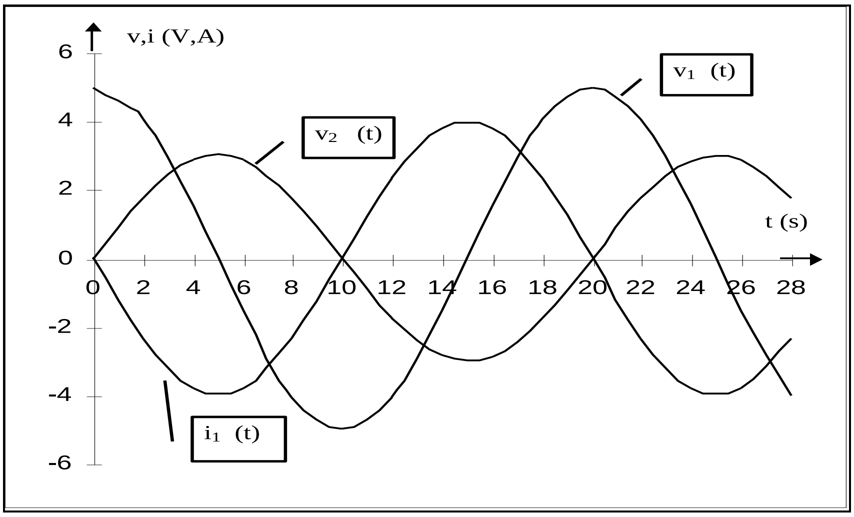
1) Dados os gráficos e funções abaixo determine:
a) A representação fasorial de cada tensão ou corrente;
b) Construa os diagramas fasoriais de cada conjunto de gráficos ou funções.

1.1) $v_1(t) = 8{,}0 \text{ sen } (500t + 25^o)$ V
$v_2(t) = 4{,}5 \text{ sen } (500t)$ V
$i_1(t) = 1{,}0 \text{ sen } (500t - 135^o)$ A

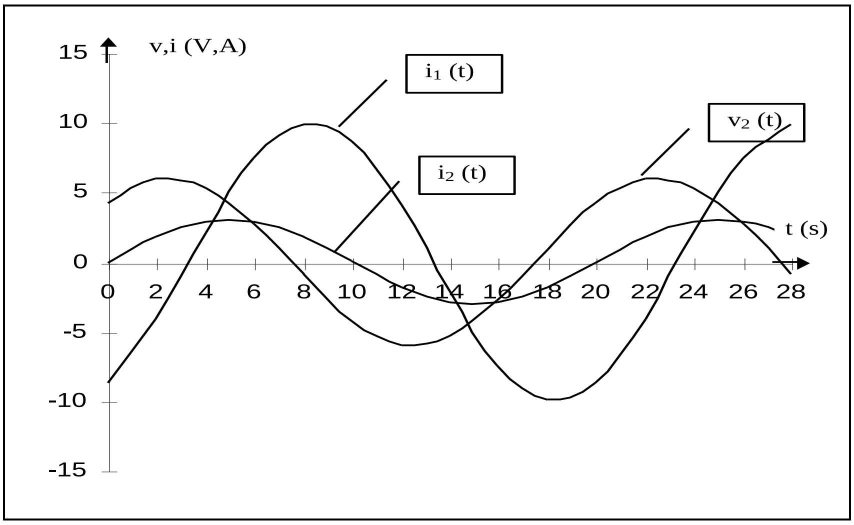
1.2) $i_1(t) = 10 \text{ sen } (400t + 60^o)$ A
$i_2(t) = 8{,}0 \text{ sen } (400t + 45^o)$ mA
$v_1(t) = 12 \text{ sen } (400t - 45^o)$ V
$i_3(t) = 7{,}0 \text{ sen } (400t)$ A

1.3) $v_1(t) = 5{,}0 \text{ sen } (400t)$ V
$v_2(t) = 2{,}0 \text{ sen } (400t - 90^o)$ V
$i_1(t) = 2{,}5 \text{ sen } (400t - 30^o)$ A
$v_3(t) = 3{,}5 \text{ sen } (400t + 180^o)$ V

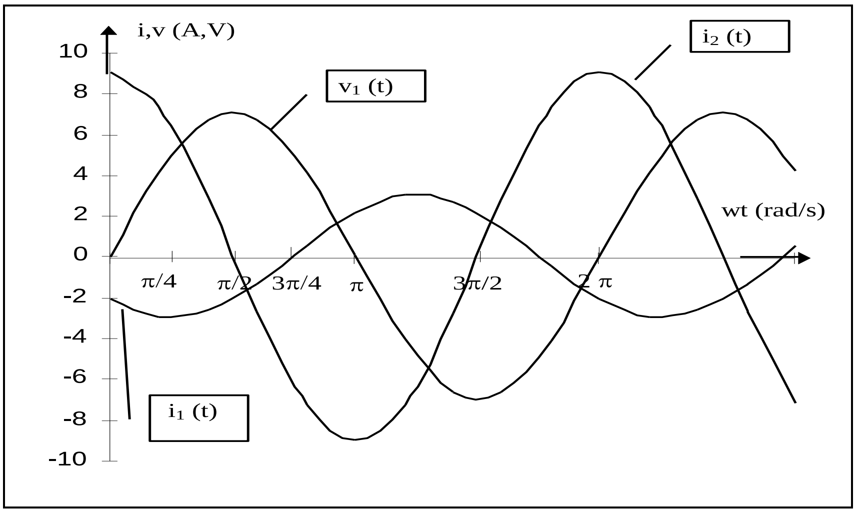
1.4)



1.5)



1.6)

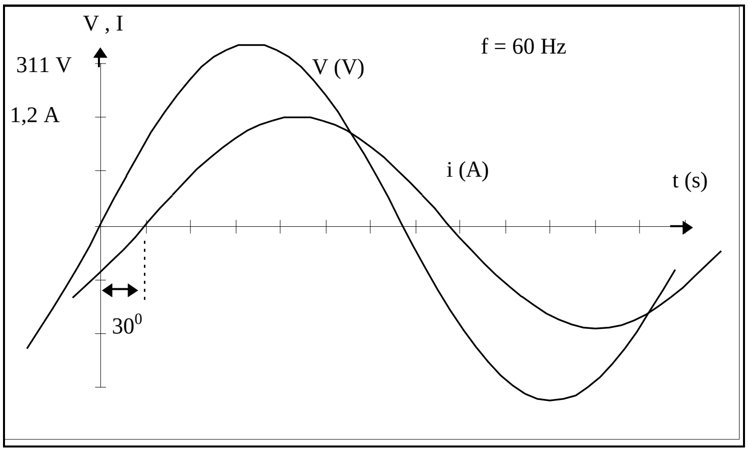


2) Dada as funções abaixo calcule as operações solicitadas.

v_1 (t) = 5 sen (100π. t + 90) V
v_2 (t) = 10 sen (100π. t + 30) V
v_3 (t) = 15 sen (100π. t - 60) V
v_4 (t) = 20 sen (100π. t + 45) V
v_5 (t) = 25 sen (100π. t - 180) V

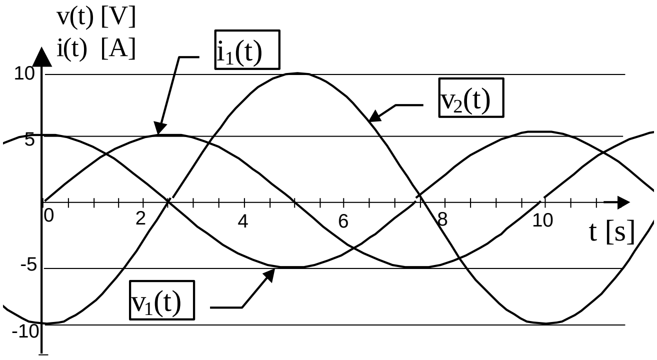
a) $v_1 + v_2$
b) $v_3 - v_4$
c) $v_5 . (v_2 + v_4)$
d) $(v_2 + v_3) . (v_1 - v_4)$
e) $(v_4 + v_5) . (v1 - v3) / (v_2 - v_5) . (v_1 + v_4)$

3) Dado um equipamento onde se mede a tensão e a corrente, obtém-se os seguintes valores conforme a curvas abaixo desenhadas.
Determine v (t) , i (t) o fasor $\dot{V}$, $\dot{I}$,

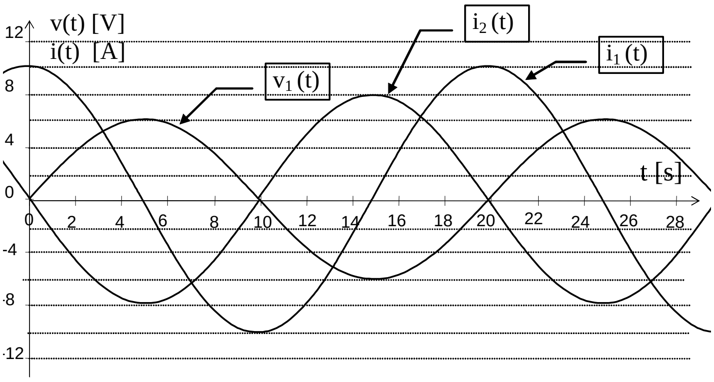


4) Dados os gráficos e funções abaixo determine a representação fasorial de cada tensão ou corrente;
a) $v_1(t) = 18,0$ sen $(500t + 30^o)$ V
b) $v_2(t) = 45$ sen $(500t – 60^0)$ V
c) $i_1(t) = 5$ sen $(500t - 45^o)$ A

d) $i_2(t) = 20 \text{ sen } (500t + 60^o)$ mA
e) $i_1(t) = 80 \text{ sen } (200t + 45^o)$ mA
f) $v_1(t) = 82 \text{ sen } (200t - 45^o)$ V
g) $i_2(t) = 50 \text{ sen } (200t - 90^0)$ mA
h) $v_2(t) = 50 \text{ sen } (200t - 45^0)$ V
i) $v_3(t) = 20 \text{ sen } (800t + 90^o)$ V
j) $i_3(t) = 25 \text{ sen } (800t - 90^o)$ A
l) $v_4(t) = 35 \text{ sen } (900t - 180^o)$ V
m) $i_4(t) = 5 \text{ sen } (900t + 180)$ mA



n)



o)

5) Dada as funções abaixo calcule as operações solicitadas.

$v_1(t) = 15 \text{ sen } (100\pi.\ t - 90^o)$ V
$v_2(t) = 30 \text{ sen } (100\pi.\ t - 30^o)$ V
$v_3(t) = 25 \text{ sen } (100\pi.\ t + 60^o)$ V
$v_4(t) = 50 \text{ sen } (100\pi.\ t - 45^o)$ V
$v_5(t) = 75 \text{ sen } (100\pi.\ t + 180^o)$ V

a) $v_1 + v_2$
b) $v_3 - v_4$
c) $v_1 \times v_2$
d) $(v_1 \times v_2) / (v_3 - v_4)$
e) $(v_1 + v_2) \times (-v_3)$
f) $(v_5 / v_1) - (v_5 / v_3)$